ÜBER

DAS ELEKTROMAGNETISCHE WECHSELFELD DER SPULEN

UND DEREN WECHSELSTROM-WIDERSTAND, SELBSTINDUKTION UND KAPAZITÄT.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
II. SEKTION

DER

KÖNIGL. BAYR. LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT
ZU MÜNCHEN

VORGELEGT IM FEBRUAR 1911

VON

WILHELM LENZ.

LEIPZIG,
JOHANN AMBROSIUS BARTH
1911.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

DEM ANDENKEN

MEINER LIEBEN, VERSTORBENEN ELTERN

GEWIDMET.

Inhaltsübersicht.

Seite

Einleitung: Problemstellung 7

Erstes Kapitel.

Das magnetische Problem 12

§ 1. Allgemeine Lösung 12
§ 2. Die Grenzbedingungen 18
§ 3. Reihenentwickelung für die c_ν 24
§ 4. Widerstand und innere Selbstinduktion 30
§ 5. Die äußere Selbstinduktion 35
§ 6. Andere Berechnungsweise von Widerstand und Selbstinduktion 43

Zweites Kapitel.

Das elektrische Problem 48

§ 7. Allgemeiner Ansatz für das elektrische Potential 49
§ 8. Die Grenzbedingungen erster Art 54
§ 9. Ergänzung des Potentials 56
§ 10. Die Kapazität 60

Drittes Kapitel.

Näherungsformeln und numerische Resultate 68

§ 11. Näherungsformeln 70
§ 12. Formelvergleichung 74

Anhang.

Konvergenzfragen 80

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548308_0021

Einleitung: Problemstellung.

Die Berechnung der Kapazität einer Wechselstromspule, auf die im folgenden besonderer Wert gelegt wird, setzt in viel höherem Maße als die des Widerstandes und der Selbstinduktion die Kenntnis des elektromagnetischen Wechselfeldes der Spulen voraus. Da eine Darstellung des elektrischen Feldes bisher gänzlich fehlte und eine solche des magnetischen Feldes nicht zugleich in der gewünschten Strenge und Allgemeinheit vorlag, so war es nötig, das ganze Spulenproblem nochmals von vornherein zu behandeln. Es geschah dies im Anschluß an eine Arbeit von Sommerfeld über „den Wechselstromwiderstand der Spulen“ [1]) und unter Benutzung einer von Maxwell gelegentlich angegebenen Methode, nach der er das Potentialfeld aus den Feldern einzelner Dipole von beliebiger Ordnung zusammensetzt. [2]) Hieraus konnten dann in vollkommener Strenge und großer Allgemeinheit die Ausdrücke für den Widerstand, die Selbstinduktion und Kapazität berechnet werden. Die einzigen Einschränkungen im Gültigkeitsbereich dieser Formeln sind die, daß die Länge der Spule groß ist gegenüber ihrem Durchmesser und daß insbesondere das Verhältnis Spulenradius [3]): Ganghöhe groß ist gegen 1. Die Fälle, in denen die letzte dieser Bedingungen nicht erfüllt ist, werden sehr selten sein; dagegen bleibt die Frage

1) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. **24.** p. 609. 1907.

2) M. Maxwell, Treatise **1.** p. 179 ff.

3) Spulenradius = Windungsradius der Spule im Gegensatz zu Drahtradius–Radius des Drahtquerschnittes.

der endlichen Länge der Spulen hier immer noch offen. Außerdem ist natürlich durch die quasistationäre Behandlungsweise gefordert, daß die Dimensionen der Spule klein sind gegen die benutzte Wellenlänge (vgl. besonders p. 69).

Im *ersten Kapitel* wird das von Sommerfeld in der erwähnten Arbeit in Strenge behandelte Problem: unendliche Länge der Spule, unendlicher Spulenradius und runder Drahtquerschnitt wieder aufgegriffen und es werden die fraglichen Koeffizienten des allgemeinen Ansatzes, die bisher nur in gewissen Spezialfällen bekannt waren, mit Hilfe der genannten Maxwellschen Methode ganz allgemein berechnet (§ 1—3).

Die Berechnung von Widerstand und Selbstinduktion geschah aus später (§ 6) zu erörternden Gründen auf zwei verschiedenen Wegen, das eine Mal aus der elektromagnetischen Energie (§ 4—5), das andere Mal durch direkte Aufstellung des aus den Maxwellschen Gleichungen folgenden Integrals der elektromotorischen Kraft (§ 6). Die Hauptaufgabe des § 6 war dann noch, die so entstehenden Formeln in die früheren (§§ 4 und 5) überzuführen, von denen sie der Form nach durchaus verschieden sind, die sich aber für die numerische Berechnung als viel praktischer erweisen.

Für die Zwecke der §§ 5 und 6 war es nötig, in das oben genannte Potentialproblem den endlichen Spulenradius einzuführen, was aber, wie leicht gezeigt werden kann (p. 35—37), keine umständlichen neuen Rechnungen erforderlich macht. Man hat nur die Exponentialfunktionen des Picciatti-Sommerfeldschen Ansatzes durch Besselsche bzw. Hankelsche Funktionen von entsprechendem Argument zu ersetzen. Da der so entstehende räumliche Ansatz jedoch nur in guter Näherung gilt, solange die Bedingung Spulenradius: Ganghöhe groß gegen 1 besteht, so unterliegen auch die Ausdrücke für Widerstand und Selbstinduktion der gleichen Bedingung. Das demnach im ersten Kapitel allein zu behandelnde Problem einer Spule von unendlich großem Radius lautet — um es nochmals ausführlich anzugeben — in der Sommerfeldschen Formulierung folgendermaßen: Gegeben ist eine unendliche Folge paralleler, von demselben Wechselstrom durchflossener Drähte (vgl. Fig. 1); es ist das magnetische Potential so zu bestimmen, daß die magnetische Feldstärke

im Unendlichen auf der einen Seite verschwindet und auf der anderen Seite — der Spulenmitte — gleich einer Konstanten wird.

Das im *zweiten Kapitel* zu behandelnde elektrische Kraftfeld ist im quasistationären Falle nicht nach einem reinen Potential verteilt, vielmehr hat man die elektrische Kraft als Summe eines (wirbellosen) Potentialfeldes und eines divergenzlosen Wirbelfeldes zusammen zu setzen (§ 6). Es kann gezeigt werden (§ 10), daß zur Berechnung der Kapazität bzw. der verteilten Ladungen die Kenntnis des Potentialfeldes allein genügt.

Die Berechnung des elektrischen *Potentialfeldes*, dessen Oberflächenwerte aus den Stetigkeitsbedingungen der elektrischen Kraft gefunden werden (§ 6), geschieht nun folgendermaßen. Wir nehmen anfänglich den Spulenradius als unendlich groß an und gehen später, ähnlich wie im Falle des magnetischen Potentialfeldes, durch geeignete Ersetzung der Exponentialfunktionen durch Zylinderfunktionen zu dem Ansatz für endlichen Spulenradius über. Bei dieser Umrechnung treten an die Stelle der parallelen Drähte parallel übereinander angeordnete Kreisringe von der gleichen Beschaffenheit des Drahtes und einem Ringradius, der gleich dem Windungsradius der Spule zu nehmen ist. Der in Wirklichkeit gleichmäßige Anstieg des Potentials längs des Spulendrahtes muß offenbar bei einer derartig in einzelne Ringe aufgelösten Spule in einen sprunghaften verwandelt werden. Da, wie erwähnt, der Spulenradius anfänglich als unendlich groß angenommen werden kann, so ergibt sich aus dem Vorstehenden für das elektrische Potentialfeld die folgende Problemstellung: es ist eine unendliche Folge von parallelen Drähten mit rundem Querschnitt gegeben; an einem Anfangsdraht und auf der einen Seite im Unendlichen — dem Äußeren der Spule — soll das Potential verschwinden und sonst von Draht zu Draht um den Betrag E = der pro Windung wirkenden elektromotorischen Kraft zu- oder abnehmen (vgl. § 6). Es zeigt sich übrigens, daß die Lösung des vorliegenden Problems (§§ 7—9) dem magnetischen gegenüber durchaus nichts wesentlich Neues bringt. Neu dagegen ist die Behandlung der *verteilten Kapazität* der Spulen. Von verteilter Kapazität spricht man bekanntlich im

Gegensatz zu der gleichsam auf eine bestimmte Stelle konzentrierten Kondensatorkapazität, d. h. man versteht darunter die Wirkung der auf der ganzen Leitung verteilten Ladung auf die Schwingung des betrachteten Systems. Es ist hierbei nicht wie sonst angängig, eine Kapazität aus der Gesamtladung und der Potentialdifferenz an den Enden der Leitung zu definieren, aber es zeigt sich, daß es stets möglich ist, die Wirkung der verteilten Kapazität als die einer nebengeschalteten Kondensatorkapazität zu deuten. Ferner erhält man das überraschende Resultat, daß die Kapazität unabhängig von der Schwingungszahl ist.

Die *Methode*, nach der die Kapazitätswirkung der verteilten Ladungen berechnet wurde, ist vergleichsweise sehr einfach und läßt sich leicht auf beliebige andere Fälle anwenden. Es wurde die Gesamtladung des einzelnen Ringes unserer in oben beschriebener Weise idealisierten Spule bestimmt und hieraus die Abnahme der Stärke des Gesamtstromes nach der Mitte der Spule hin berechnet. Aus dieser Kenntnis des Stromverlaufs läßt sich dann unmittelbar die Schwingungsgleichung der Spule, d. h. die Beziehung zwischen der an den Enden wirkenden elektromotorischen Kraft und dem zugeführten Gesamtstrom aufstellen. Zur besseren Veranschaulichung wurde die Spule gedeutet als kapazitätsloses System, dem schachtelförmig solche Systeme nebengeschaltet sind, daß ihre Wirkung derjenigen der Ladungen gerade gleich war (vgl. Fig. 3b p. 62). Eine nachträgliche Untersuchung der Zusammensetzung dieser vorläufig unbestimmt gelassenen Einzelsysteme ergab in Übereinstimmung mit den an einer Hin- und Rückleitung gefundenen Verhältnissen[1]), daß die Gesamtkapazität gleich dem dritten Teil der Spulenlänge × der pro Längeneinheit definierten Kapazität ist.

Die *numerische Auswertung* der in den beiden vorangegangenen Kapiteln erhaltenen Endformeln für Widerstand, Selbstinduktion und Kapazitätswirkung ist, sofern man sich nicht auf kleine Werte v des Verhältnisses Drahtradius : Ganghöhe bzw. auf kleine Schwingungszahlen beschränkt, sehr kompliziert und zeitraubend. Es ist daher beabsichtigt, für

1) Ohrlich, Kapazität und Induktivität p. 132.

die größeren Werte von v und der Wechselzahl Tabellen berechnen zu lassen, aus denen man durch Interpolation die fraglichen Werte in jedem einzelnen Fall finden kann. Ich möchte in diesem Zusammenhang gleich dem bezüglich der Formeln für Widerstand und Selbstinduktion möglichen Einwurf begegnen, daß die Cohenschen[1]) Formeln mit ihrer scheinbar ebenso großen Allgemeingültigkeit den Vorzug einer weit größeren Einfachheit verbänden und daher den Wert unserer Ausdrücke illusorisch machten. Indessen geben die Cohenschen Formeln, wie ich an anderer Stelle[2]) gezeigt habe, Abweichungen von unseren strengeren Formeln wie auch der Erfahrung, die auch praktisch schwerwiegend werden können.

Für die oben näher bezeichneten leichter zugänglichen Fälle sind im dritten Kapitel *Näherungsformeln* entwickelt und ich bin dabei jeweils um ein Glied in der Reihenentwickelung weiter gegangen als dies bisher von anderer Seite geschehen ist. Der Verlauf der einzelnen Koeffizienten in ihrer Abhängigkeit von dem mehrfach erwähnten Verhältnis v ist an Kurven veranschaulicht worden. Es sind dabei fortlaufend die aus den verschiedenen bisher entwickelten Formeln folgenden Kurven mit den unserigen verglichen. Über die Werte der Kapazität sind ebenfalls genauere numerische Angaben gemacht. Den Schluß bildet eine anhangsweise angefügte Konvergenzbetrachtung.

Die Behandlung sehr kurzer Spulen von im Verhältnis zur Länge großem Spulenradius, die einige Aussicht auf Erfolg versprach, erwies sich als so kompliziert, daß ich vorläufig davon Abstand nahm. Dagegen werde ich die nachstehenden Betrachtungen, die sich auf die unifilar gewickelte Spule beziehen, demnächst auf den praktisch wichtigen Fall der bifilar gewickelten ausdehnen.

1) L. Cohen, Bull. Bur. of Standards 4. Nr. 1. p. 161. 1907.
2) W. Lenz, Jahrb. d. drahtl. Telegr. u. Telef. 1910/11.

Erstes Kapitel.

Das magnetische Problem.

§ 1. Allgemeine Lösung.

Wir bedienen uns der bei Sommerfeld gebrauchten Benennungen, die aus der von dort entnommenen Fig. 1 leicht

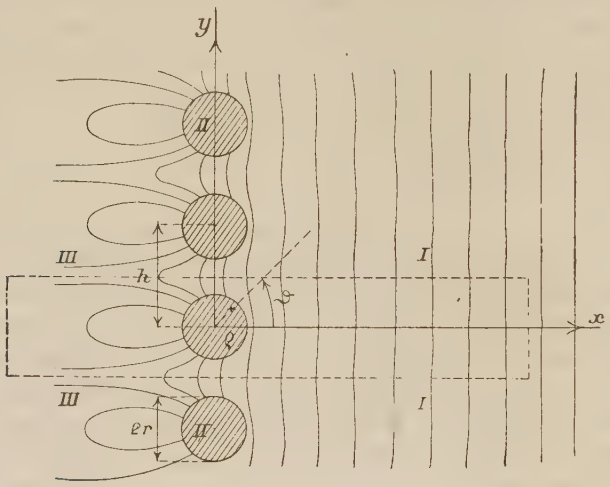

Fig. 1.

abgelesen werden können. I stellt das Innere, III das Äußere der Spule dar und II ist das von den Querschnitten der leitenden Drähte gebildete Gebiet. Bei quasistationärer Behandlung besteht in I und III ein magnetisches Potential, während in II die überall senkrecht zu unserer Zeichenebene gerichtete elektrische Kraft $\mathfrak{E}$ der Gleichung:

$$(1) \qquad \Delta \mathfrak{E} + k^2 \mathfrak{E} = 0, \quad k = (1-i)\sqrt{2\pi n \mu \sigma}$$

zu genügen hat. (n bedeutet die Schwingungszahl in 2π Sek., μ die Permeabilität, σ die in gewöhnlicher Weise elektromagnetisch gemessene Leitfähigkeit.)[1]) Unsere Darstellung, die sich vorläufig der Sommerfeldschen durchaus anschließt, wird nur in dem einen Punkte davon abweichen, daß der in den Drähten fließende Gesamtstrom Je^{int} als gegeben angenommen wird statt des Wertes He^{int}, den das in der Spulenmitte homogene Magnetfeld besitzt. Die Lösung von (1) kann

dann in Polarkoordinaten ϱ, ϑ (vgl. Fig. 1) so geschrieben werden:

$$(2) \qquad \mathfrak{E} = -\frac{k}{\sigma \cdot h} J e^{int} \sum_{0}^{\infty}{}^{(\nu)} c_\nu \frac{J_\nu(k\varrho)}{J_\nu'(kr)} \cos \nu\vartheta$$

(h bedeutet die Ganghöhe, r den Drahtradius). Hierin ist der Bequemlichkeit halber von den Entwickelungskoeffizienten c_ν eine allen gemeinsame vor dem Summenzeichen stehende Konstante und eine speziellere $1/J_\nu'(kr)$ abgespalten. J_ν bedeutet die ν^{te} Besselsche Funktion und J_ν' ihren Differentialquotient nach dem Argument. Die Konstante c_0 könnte aus (2) durch Berechnung des Gesamtstromes gefunden werden; wir werden aber gleich einen bequemeren Weg hierfür einschlagen.

Aus der Maxwellschen Beziehung $\mu \dot{\mathfrak{H}} = -\operatorname{rot} \mathfrak{E}$ folgt für das Innere der Drähte, wenn $\mathfrak{H}$ die magnetische Feldstärke bedeutet:

$$(3) \qquad \mathfrak{H}_\varrho = \frac{4\pi\sigma}{k^2} \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \vartheta}; \quad \mathfrak{H}_\vartheta = -\frac{4\pi\sigma}{k^2} \cdot \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \varrho}.$$

Wendet man dies auf (2) an, so kommt:

$$(4) \qquad \begin{cases} \mathfrak{H}_\varrho = \dfrac{1}{k\varrho} \cdot \dfrac{4\pi J e^{int}}{h} \cdot \displaystyle\sum_{1}^{\infty}{}^{(\nu)} \nu c_\nu \frac{J_\nu(k\varrho)}{J_\nu'(kr)} \sin \nu\vartheta, \\ \mathfrak{H}_\vartheta = \qquad \dfrac{4\pi J e^{int}}{h} \cdot \displaystyle\sum_{0}^{\infty}{}^{(\nu)} c_\nu \cdot \frac{J_\nu'(k\varrho)}{J_\nu'(kr)} \cdot \cos \nu\vartheta. \end{cases}$$

Aus der letzten dieser beiden Gleichungen erhält man für das über die Peripherie eines Drahtquerschnitts erstreckte Linienintegral der magnetischen Kraft

$$\int_0^{2\pi} \mathfrak{H}_\vartheta r \, d\vartheta = \frac{4\pi J \cdot e^{int}}{h} \cdot 2\pi r c_0;$$

und da dieses Integral andererseits gleich $4\pi \times$ Gesamtstrom ist, so bestimmt sich c_0 wie bei Sommerfeld zu:

$$(5) \qquad c_0 = \frac{h}{2\pi r}.$$

1) Zu Beginn des dritten Kapitels sind die in den Endformeln auftretenden Bezeichnungen übersichtlich zusammengestellt und erläutert.

Verlegt man das Linienintegral nun in den in Fig. 1 punktierten weit entfernten Rechtecksweg, so erhält man mit Rücksicht auf die Symmetrieverhältnisse des äußeren Magnetfeldes $h \,.\, H \,.\, e^{int}$, wenn H, wie erwähnt, den Wert des homogenen Magnetfeldes der Spulenmitte bedeutet. Hieraus folgt mit Rücksicht auf die eben benutzte Beziehung:

$$H = \frac{4\pi J}{h},$$

wie auch aus Vergleich der Formeln (4) mit den entsprechenden Ausdrücken bei Sommerfeld hätte gefunden werden können.

Setzen wir dies, um mit den dortigen Bezeichnungen in Übereinstimmung zu bleiben, in den in den Gebieten I und II gültigen Sommerfeldschen Ansatz für $\mathfrak{H}$ ein, so kommt, wenn V die magnetische Potentialfunktion bedeutet:

$$\mathfrak{H} = \frac{4\pi J e^{int}}{h} \,.\, \text{grad}\, V. \tag{6}$$

Bei der Aufstellung des Ausdrucks für V werden wir uns, wie überhaupt bei der folgenden Darstellung, von den Sommerfeldschen Untersuchungen mehr und mehr entfernen müssen. Wir entwickeln das Potential V nach Funktionen G_ν, die man als eine Verallgemeinerung der Maxwellschen Gitterlösung bezeichnen kann. Die letztere entsteht bekanntlich dadurch, daß man den Achsen der Drähte (vgl. Fig. 1) gleichmäßige Belegungen erteilt und die so entstehenden Einzelfelder summiert.[1]) Setzt man $z = x + iy$, so kommt für die im folgenden mit G_0 bezeichnete Maxwellsche Gitterlösung:

$$G_0 = \log iz + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{(m)} \log\left(\frac{iz}{mh} + 1\right). \tag{7}$$

Der Apostroph an dem Summenzeichen bedeutet in üblicher Weise, daß das nullte Glied auszulassen ist. Zur Konvergenz von (7) ist erforderlich, daß man je zwei zu $m = 0$ symmetrisch gelegenen Glieder der Summe zusammenfaßt. Mit Rücksicht hierauf kommt in Produktform:

$$G_0 = \log\left(iz \prod_{m=1}^{m=\infty}\left(\left\{1 - \left(\frac{iz}{mh}\right)^2\right\}\right)\right) = \log \sin \pi \frac{iz}{h} - \log \frac{\pi}{h}.$$

1) J. Cl. Maxwell, Treatise 1. p. 286 ff.

Da die Funktion G_0 in ihrem Verhalten nicht wesentlich geändert wird, wenn man eine ganze rationale Funktion von z hinzufügt, so ergibt sich aus der vorstehenden ohne weiteres die Maxwellsche Form:

$$G_0 = \log\left(e^{2\pi\frac{z}{h}} - 1\right). \tag{8}$$

Diese nullte Gitterlösung erfüllt die Bedingungen im Unendlichen, indem sie für $x = -\infty$ gleich einer Konstanten und für $x = +\infty$ proportional z wird[1]), und reicht überhaupt, wie Sommerfeld gezeigt hat, zur Darstellung des *Gleichstromfeldes* vollständig aus, wenn für das Material der Drähte $\mu = 1$ gesetzt wird. Zu der für den allgemeinen Fall ($\mu \neq 1$, $n > 0$) erforderlichen Verallgemeinerung der nullten Gitterfunktion erinnern wir an die Maxwellsche Darstellung der Kugelfunktionen als Verteilung des Potentials von Dipolen auf der um diese als Mittelpunkt herum beschriebenen Einheitskugel.[2]) Der ν-fache Dipol und also die ν^{te} Kugelfunktion wird hiernach durch ν-fache Differentiation des nullten Potentials nach einer bestimmten Richtung gefunden. Die allgemeine Lösung der Potentialgleichung in räumlichen Polarkoordinaten läßt sich also, entsprechend der Entwickelung nach Kugelfunktionen, aus den Feldern von Dipolen zusammensetzen. Es liegt hiernach nahe, in unserem gegenwärtigen Falle ein gleiches zu versuchen, wie überhaupt ein solcher Aufbau der allgemeinen Lösung aus den Feldern geeigneter Anordnungen von Dipolen in noch manchen anderen Fällen Erfolg zu versprechen scheint. Als Pol haben wir jetzt anzusehen den einfach belegten Draht, wie er zur Konstruktion von G_0 verwendet wurde; das Feld eines Dipols wird durch Differentiation hieraus gewonnen, hat also die Gestalt $1/z$ und allgemein das Feld eines ν-fachen Dipols diejenige von $1/z^\nu$. Wir werden demnach als verallgemeinerte ν^{te} Gitterlösung

$$G_\nu = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{(m)} \frac{1}{(z - i\,m\,h)^\nu} \tag{9}$$

1) Letzeres ist gefordert, damit ein in der Spulenmitte homogenes Magnetfeld resultiert.

2) J. Cl. Maxwell, Treatise **1.** p. 179 ff.

anzusetzen haben, wobei, wenigstens für $\nu = 1$, zur Konvergenz noch zu fordern ist, daß zu $m = 0$ symmetrisch gelegene Glieder zusammengefaßt werden. Wenn wir unter den a_ν gewisse später zu bestimmende komplexe Konstanten verstehen, so kann die allgemeine Lösung der Potentialgleichung für unseren Fall so geschrieben werden:

$$W = \sum_{0}^{\infty}{}^{(\nu)}\, a_\nu G_\nu . \tag{10}$$

Ehe wir das hierin enthaltene magnetische Potential V betrachten, wollen wir jedoch den Gitterlösungen (8), (9) noch eine für das Folgende zuweilen bequemere Form geben. Wie schon mehrfach hervorgehoben, können wir alle höheren Gitterfunktionen durch Differentiation aus der nullten ableiten; der Vergleich von (7) und (9) zeigt, daß man zu setzen hat:

$$G_\nu = \frac{(-1)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\frac{d^\nu}{dz^\nu}(G_0). \tag{11}$$

Nun ergibt die Reihenentwickelung von (8) nach Potenzen der Exponentialfunktion:

$$\begin{cases} x > 0 \quad G_0 = 2\pi\frac{z}{h} - \sum_{1}^{\infty}{}^{(s)}\frac{1}{s}e^{-2\pi s\frac{z}{h}}, \\ x < 0 \quad G_0 = \text{Const.} - \sum_{1}^{\infty}{}^{(s)}\frac{1}{s}e^{+2\pi s\frac{z}{h}}. \end{cases} \tag{12}$$

Die in dem letzten Ausdruck auftretende Konstante ist nach (8) gleich $\log(-1)$ und hat also vorerst noch keinen bestimmten Wert. Sie bestimmt sich dadurch, daß beide Entwickelungen (12) für $x = 0$ identisch werden müssen. Eine einfache bei Sommerfeld durchgeführte Rechnung zeigt, daß man für das Intervall $mh < y < (m+1)h$ zu setzen hat:

$$\text{Const.} = \pi i(2m+1).$$

Dies bedingt eine Unstetigkeit des imaginären Teils von G_0 längs der negativen x-Achse, wie es nach den Umlaufsbedingungen des magnetischen Potentials sein muß. Das gleiche findet natürlich längs den Geraden $y = mh$, $x < 0$ statt.

Die durch Differentiation aus G_0 abgeleiteten höheren Gitterfunktionen sind dagegen, abgesehen von den in den Drahtachsen gelegenen Polen, überall in der z-Ebene stetig; sie lauten mit Rücksicht auf (11) und (12) in Reihenentwickelung:

$$(13)\quad \begin{cases} x>0 \quad G_\nu = \dfrac{1}{(\nu-1)!}\left(\dfrac{2\pi}{h}\right)^\nu \sum_1^\infty{}^{(s)}\, s^{\nu-1} e^{-2\pi s\frac{z}{h}}, \\ x<0 \quad G_\nu = \dfrac{(-1)^\nu}{(\nu-1)!}\left(\dfrac{2\pi}{h}\right)^\nu \sum_1^\infty{}^{(s)}\, s^{\nu-1} e^{+2\pi s\frac{z}{h}}. \end{cases}$$

Für $\nu = 1$ tritt zu der ersten dieser beiden Gleichungen noch die Konstante $-2\pi/h$ hinzu. Setzen wir nun ähnlich wie in (10) als magnetisches Potential an:

$$(14)\qquad V = \sum_0^\infty{}^{(\nu)}\, a_\nu \,\Im\mathfrak{m}(G_\nu),$$

wobei $\Im\mathfrak{m}$ wie in allen folgenden Formeln bedeutet, daß der imaginäre Teil zu nehmen ist, so gelangen wir, mit den Abkürzungen α_s und β_s für gewisse gleich zu nennende Verbindungen der a_ν, zu dem den Bedingungen im Unendlichen genügenden Sommerfeldschen Ansatz:

$$(15)\quad \begin{cases} x>0 \quad V = y \qquad + \dfrac{h}{2\pi}\sum_1^\infty{}^{(s)}\, \alpha_s \sin 2\pi s\frac{y}{h}\, e^{-2\pi s\frac{x}{h}}, \\ x<0 \quad V = \text{const.} + \dfrac{h}{2\pi}\sum_1^\infty{}^{(s)}\, \beta_s \sin 2\pi s\frac{y}{h}\, e^{+2\pi s\frac{x}{h}}. \end{cases}$$

Dabei ist $a_0 = h/2\pi$ und also const. im Intervall $mh<y<(m+1)h$ gleich $(2m+1)h/2$ zu setzen. Die Koeffizienten α_s und β_s drücken sich aus (12) und (13) mit Rücksicht auf (14) durch die a_ν folgendermaßen aus:

$$(16)\quad \begin{cases} \alpha_s = \dfrac{1}{s} - \sum_1^\infty{}^{(\nu)} \dfrac{a_\nu}{(\nu-1)!}\left(\dfrac{2\pi}{h}\right)^{\nu+1}\cdot s^{\nu-1}, \\ \beta_s = -\dfrac{1}{s} + \sum_1^\infty{}^{(\nu)} (-1)^\nu \dfrac{a_\nu}{(\nu-1)!}\left(\dfrac{2\pi}{h}\right)^{\nu+1}\cdot s^{\nu-1}. \end{cases}$$

Unter Benutzung dieser Beziehungen sind nach dem Obigen offenbar die bei Sommerfeld aufgestellten allgemeinen Stetigkeitsbedingungen alle erfüllt, und es bleiben noch die im nächsten Paragraphen zu behandelnden Bedingungen an der Oberfläche der Drähte.

§ 2. Die Grenzbedingungen.

Die auf die Stetigkeitsbedingungen bezüglichen prinzipiellen Fragen sind bei Sommerfeld eingehend erörtert; danach ist an der Oberfläche der Drähte ein stetiger Übergang von $\mathfrak{H}_\vartheta$ und $\mu\mathfrak{H}_\varrho$ zu verlangen.

Wir stellen der Betrachtung dieser Grenzbedingungen die Ableitung einiger für das Folgende wichtiger allgemeinen Beziehungen voran, die sich zwischen einem hier einzuführenden Hilfspotential:

$$U = \sum_0^\infty{}^{(\nu)}\, a_\nu \Re(G_\nu) \tag{17}$$

und dem in (14) aufgestellten magnetischen Potential V ergeben (in (17) wie in allen folgenden Formel bedeutet $\Re$, daß der reelle Teil genommen werden soll). Zwischen (14), (17) und (10) besteht vor allem der Zusammenhang $U + iV = W$. Trotzdem sind aber U und V wegen der komplexen Annahme der a_ν nicht als konjugiert zu bezeichnen. Sie verhalten sich jedoch in dem folgenden wesentlichen Punkt ganz wie konjugierte Potentiale. Man hat nämlich, wenn ds das Linienelement und dn das Element der nach außen gerichteten Normalen eines geschlossenen Linienzuges ist:

$$\frac{\partial}{\partial s}\Im\mathfrak{m}(G_\nu) = \frac{\partial}{\partial n}\Re(G_\nu); \qquad \frac{\partial}{\partial s}\Re(G_\nu) = -\frac{\partial}{\partial n}\Im\mathfrak{m}(G_\nu).$$

Da demnach:

$$\sum_0^\infty{}^{(\nu)}\, a_\nu \frac{\partial}{\partial s}\Re(G_\nu) = -\sum_0^\infty{}^{(\nu)}\, a_\nu \frac{\partial}{\partial n}\Im\mathfrak{m}(G_\nu),$$

so kommt aus (14) und (17):

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial U}{\partial s} = -\dfrac{\partial V}{\partial n} \\ \text{und ähnlich:} \\ \dfrac{\partial V}{\partial s} = \dfrac{\partial U}{\partial n}. \end{array}\right. \tag{18}$$

Einige später zu verwendenden Integralbeziehungen ergeben sich, wenn man beachtet, daß V bei Einführung von $x = \varrho \cos \vartheta$, $y = \varrho \sin \vartheta$ eine in ϑ ungerade und U eine in ϑ gerade Funktion ist; hiernach kommt für ein während der Integration festgehaltenes ϱ und für beliebiges ganzzahliges m:

$$(19)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} V \cos m\vartheta \, d\vartheta = 0\,; \quad \int_0^{2\pi} U \sin m\vartheta \, d\vartheta = 0\,, \\ \text{und hieraus:} \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\partial V}{\partial \varrho} \cos m\vartheta \, d\vartheta = 0\,; \quad \int_0^{2\pi} \frac{\partial U}{\partial \varrho} \sin m\vartheta \, d\vartheta = 0\,. \end{cases}$$

Die anfangs genannten Stetigkeitsbedingungen an der Oberfläche des Drahtes ($\varrho = r$) lauten nun nach (4) und (6) und mit Rücksicht auf (18) (man beachte die Vereinfachung, die sich im zweiten Ausdruck (4) für $\varrho = r$ ergibt):

$$(20)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_0^{\infty}{}^{(\nu)}\, c_\nu \cos \nu\vartheta = \left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial V}{\partial \vartheta}\right)_{\varrho=r} = \left(\frac{\partial U}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=r}, \\ \displaystyle\sum_1^{\infty}{}^{(\nu)}\, c_\nu \lambda_\nu \sin \nu\vartheta = \left(\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=r}, \\ \lambda_\nu = \dfrac{\mu\nu}{kr}\dfrac{J_\nu(kr)}{J_\nu'(kr)}. \end{cases}$$

Bei Sommerfeld wird über diese beiden Gleichungen einzeln in Fourrierscher Weise das Integral nach ϑ genommen; man betrachtet aber vorteilhaft die Summe bzw. die Differenz der so erhaltenen Beziehungen. Demnach ist zu bilden ($m > 0$):

$$(21)\quad \pi c_m (1 \pm \lambda_m) = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial U}{\partial \varrho} \cos m\vartheta \pm \frac{\partial V}{\partial \varrho} \sin m\vartheta\right)_{\varrho=r} d\vartheta\,.$$

Dieses Integral kann vermöge (19) auf die Form:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial W}{\partial \varrho}\, e^{\mp i m\vartheta}\, d\vartheta$$

gebracht werden. Im Hinblick auf ein später zu verwendendes Nebenresultat betrachten wir aber nicht diese differenzierte

Form, sondern das über einen geschlossenen Kreisweg um den Punkt $x = 0$, $y = 0$ erstreckte Integral

$$\int W z^{\mu-1} dz = \sum_{0}^{\infty} (\nu) a_\nu \int G_\nu z^{\mu-1} dz . \tag{22}$$

Aus der Darstellung (9) für die G_ν (bei $\nu \geqq 1$) folgt nach dem Cauchyschen Satz:

$$\int G_\nu z^{\mu-1} dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{für } \mu = \nu , \\ 0 & \text{,, } \mu \neq \nu . \end{cases}$$

Diese Beziehung gilt jedoch nur, solange der um den Nullpunkt beschriebene Kreis keinen der benachbarten Pole einschließt (also $\varrho < h$ bzw. $r < h$, wie dies beim Draht ja immer erfüllt ist). Außerdem muß $\mu \geqq 1$ sein, da sonst die Entwickelungen nach positiven Potenzen von z, die in dem betrachteten Bereich für die einzelnen Glieder $1/(z - i m h)^\nu$ der G_ν anzusetzen sind, bei der Integration einen von Null verschiedenen Beitrag liefern. Für diesen später auftretenden Fall werden wir uns aber der hier bequemeren Reihenentwickelungen (13) für die G_ν bedienen.

Eine Ausnahme von dem Obigen macht die nullte Gitterlösung; für diese folgt unter den gleichen einschränkenden Bedingungen aus (7):

$$\int G_0 z^{\mu-1} dz = \int \log z \, . \, z^{\mu-1} dz ,$$

d. h. wenn $z = \varrho e^{i\vartheta}$ gesetzt wird:

$$\int G_0 z^{\mu-1} dz = - \varrho^\mu \int_0^{2\pi} \vartheta \, e^{i\mu\vartheta} d\vartheta = \frac{2\pi i}{\mu} \varrho^\mu .$$

Demnach kommt aus (22) das Nebenresultat:

$$\int_0^{2\pi} W e^{i\mu\vartheta} d\vartheta = \frac{2\pi a_0}{\mu} + \frac{2\pi a_\mu}{\varrho^\mu} , \tag{23}$$

und endlich durch beiderseitige Differentiation nach ϱ und mit Rücksicht auf (19) die gesuchte Beziehung:

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial U}{\partial \varrho} \cos \mu\vartheta - \frac{\partial V}{\partial \varrho} \sin \mu\vartheta \right) d\vartheta = - 2\pi\mu \, \frac{a_\mu}{\varrho^{\mu+1}} . \tag{24}$$

Man erhält so aus (21) den einfachen Zusammenhang zwischen den in (2) eingeführten Koeffizienten der Stromverteilung und den Entwickelungskoeffizienten a_ν des magnetischen Potentials:

$$2\,m\,a_m = -\,r^{m+1}\cdot(1-\lambda_m)\,c_m\,. \tag{25}$$

Dem oberen Vorzeichen in (21) entsprechend hat man nach dem Gesagten ferner zu bilden:

$$\pi\,c_m(1+\lambda_m) = \int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial U}{\partial \varrho}\cos m\,\vartheta + \frac{\partial V}{\partial \varrho}\sin m\,\vartheta\right)_{\varrho=r} d\,\vartheta\,,$$

d. h. wegen (19)

$$= \int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial W}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=r} e^{-i\,m\,\vartheta}\,d\,\vartheta = \int_0^{2\pi}\left(\frac{d\,W}{d\,z}\right)_{\varrho=r}\cdot e^{-i\,(m-1)\,\vartheta}\,d\,\vartheta\,.$$

Da nach (11):

$$\frac{d\,W}{d\,z} = a_0\,G_1 - \sum_1^\infty{}^{(\nu)}\,\nu\cdot a_\nu\,G_{\nu+1}\,,$$

so entspricht das vorstehende Integral dem Fall $\mu \leqq 1$ in (22). Nach einer oben gemachten Bemerkung findet man aus (13) mit der im folgenden durchgängig benutzten Abkürzung $v = 2\,\pi\,r/h$:

$$\int_0^{2\pi} G_{\nu+1}\cdot e^{-i\,(m-1)\,\vartheta}\,d\,\vartheta = \frac{1}{\nu!}\left(\frac{2\,\pi}{h}\right)^{\nu+1}\cdot\sum_1^\infty{}^{(s)}\,s^\nu\int_{-\pi/2}^{+\pi/2} e^{-v\,s\,e^{i\vartheta}-i(m-1)\vartheta}\,d\,\vartheta$$

$$-\,\frac{(-1)^\nu}{\nu!}\left(\frac{2\,\pi}{h}\right)^{\nu+1}\sum_1^\infty{}^{(s)}\,s^\nu\int_{\pi/2}^{3\pi/2} e^{+v\,s\,e^{i\vartheta}-i(m-1)\vartheta}\,d\,\vartheta\,.$$

Bei Sommerfeld sind die in der ersten dieser Summen auftretenden Integrale aus Gründen, die hier in Wegfall kommen, mit $2\,d_{s,m}$ bezeichnet; wir führen ein:

$$d_{s,m} = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} e^{-v\,s\,e^{i\vartheta}-i(m-1)\vartheta}\,d\,\vartheta\,. \tag{26}$$

Die entsprechenden Integrale der zweiten Summe sind dann gleich $(-1)^{m-1}\,d_{s,m}$, und man erhält:

$$\int_0^{2\pi} G_{\nu+1}\cdot e^{-i(m-1)\vartheta}\,d\,\vartheta = \frac{1}{\nu!}\left(\frac{2\,\pi}{h}\right)^{\nu+1}\sum_1^\infty{}^{(s)}\left\{1+(-1)^{m+\nu}\right\}s^\nu\,d_{s,m}\,. \tag{27}$$

Für $\nu = 0$, also für G_1, tritt nach (13) zu der vorstehenden Summe noch ein Glied

$$\frac{2\pi}{h} \int_{-\pi}^{+\pi/2} e^{-i(m-1)\vartheta} \, d\vartheta$$

hinzu, so daß wegen $a_0 = h/2\pi$ nach (16) und (27) kommt:

$$(28)\quad \pi c_m (1+\lambda_m) = \frac{2}{m-1} \sin(m-1)\frac{\pi}{2} + \sum_1^\infty{}^{(s)}\, s\,(\alpha_s - (-1)^m \beta_s)\, d_{s,m}.$$

Durch die Gleichungssysteme (25) und (28) sind die Grenzbedingungen vollständig beschrieben; sie sind also den beiden bei Sommerfeld aufgestellten Beziehungen äquivalent, wie überhaupt (28) aus diesen vollständig hätte gewonnen werden können. Das wesentlich Neue unserer Formeln gegenüber den Sommerfeldschen tritt erst hervor, wenn man durch Kombination von (16) und (25) den Zusammenhang zwischen den α_s, β_s und den c_ν darstellt. Man erhält einerseits:

$$(29)\qquad s(\alpha_s - \beta_s) = 2 + \sum_1^\infty{}^{(\nu)} \frac{c_{2\nu}}{2\nu!} v^{2\nu+1} \cdot (1 - \lambda_{2\nu})\, s^{2\nu}$$

und andererseits:

$$(30)\qquad s(\alpha_s + \beta_s) = \sum_1^\infty{}^{(\nu)} \frac{c_{2\nu-1}}{(2\nu-1)!} v^{2\nu} (1 - \lambda_{2\nu-1})\, s^{2\nu-1}.$$

Diese Gleichungen gestatten die Elimination der α_s und β_s aus (28) und ermöglichen damit die Aufstellung einer für die Reihenentwickelung der c_ν nützlichen Beziehung zwischen einem einzelnen dieser Koeffizienten und allen übrigen. Es kommt nämlich für gerades m (hier gleich $2m$ gesetzt) aus (28) und (29):

$$(31)\quad \begin{cases} \pi c_{2m}(1+\lambda_{2m}) = \dfrac{2}{2m-1} \sin(2m-1)\dfrac{\pi}{2} + 2\, S_{2m,0} \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum_1^\infty{}^{(\nu)} \frac{c_{2\nu}}{2\nu!} v^{2\nu+1} (1 - \lambda_{2\nu})\, S_{2m,2\nu}, \\ S_{2m,2\nu} = \displaystyle\sum_1^\infty{}^{(s)}\, s^{2\nu} \cdot d_{s,2m} \end{cases}$$

und ähnlich für ungerades m (hier gleich $2m-1$ gesetzt) aus (28) und (30):

$$(32)\quad \begin{cases} \pi\, c_{2m-1}(1+\lambda_{2m-1}) = \dfrac{\sin(m-1)\pi}{m-1} \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum_1^\infty{}^{(\nu)} \frac{c_{2\nu-1}}{(2\nu-1)!}\, v^{2\nu}(1-\lambda_{2\nu-1})\cdot S_{2m-1,\,2\nu-1}\,, \\ S_{2m-1,\,2\nu-1} = \displaystyle\sum_1^\infty{}^{(s)}\, s^{2\nu-1}\, d_{s,\,2m-1}\,. \end{cases}$$

Der Wert der mit $S_{2m,\,0}$ bezeichneten Summe ist von Sommerfeld durch komplexe Integration ermittelt worden. Es ergab sich, wenn die B_{2m} die sogenannte Bernoullische Zahlen bedeuten:

$$(33)\qquad S_{2m,\,0} = -\frac{\sin(2m-1)\dfrac{\pi}{2}}{2m-1} - \pi\,(-1)^m \frac{B_{2m}}{2m!}\, v^{2m-1}\,.$$

Die übrigen Summen S können aus der vorstehenden durch Differentiation nach v gewonnen werden, denn nach (26) kommt:

$$\frac{d^\alpha}{d\,v^\alpha}\, d_{s,\,2p} = (-1)^\alpha\, s^\alpha\, d_{s,\,2p-\alpha}$$

und daher auch:

$$\frac{d^\alpha}{d\,v^\alpha}\, S_{2p,\,0} = (-1)^\alpha \sum_1^\infty{}^{(s)}\, s^\alpha \cdot d_{s,\,2p-\alpha} = (-1)^\alpha\, S_{2p-\alpha,\,\alpha}\,.$$

Setzt man jetzt das eine Mal $\alpha = 2\nu$, $2p-\alpha = 2m$ und das andere Mal $\alpha = 2\nu-1$, $2p-\alpha = 2m-1$, so erhält man:

$$(34)\quad \begin{cases} S_{2m,\,2\nu} = \dfrac{d^{2\nu}}{d\,v^{2\nu}}\, S_{2m+2\nu,\,0} \\ \qquad\qquad = -\pi\,(-1)^{m+\nu}\cdot \dfrac{B_{2m+2\nu}}{2m+2\nu}\cdot \dfrac{v^{2m-1}}{(2m-1)!}\,, \\ S_{2m,\,2\nu-1} = -\dfrac{d^{2\nu-1}}{d\,v^{2\nu-1}}\, S_{2m+2\nu-2,\,0} \\ \qquad\qquad = -\pi\,(-1)^{m+\nu}\cdot \dfrac{B_{2m+2\nu-2}}{2m+2\nu-2}\cdot \dfrac{v^{2m-2}}{(2m-2)!}\,. \end{cases}$$

Wir haben damit alles für die im nächsten Paragraphen zu behandelnde Reihenentwickelung der c_ν Erforderliche bereit-

gestellt. Eine ähnliche Reihendarstellung für die α_s und β_s zu suchen, ist unzweckmäßig; wir werden im folgenden mit den Beziehungen (29) und (30) vollständig auskommen.

§ 3. Reihenentwickelung für die c_ν.

Die Beziehungen (31) und (32) mit (33) und (34) stellen hinsichtlich der Parameter v und kr ein unendliches System von Funktionalgleichungen für die c_ν dar. Wenn wir zur Vereinfachung unserer so entstehenden Formeln statt der c_ν eine neue Schar von Koeffizienten:

$$C_m = (1 + \lambda_m)\, c_m \tag{35}$$

einführen, so erhalten wir für $m > 0$ aus (31), (32):

$$\left\{\begin{aligned} C_{2m} &= -2(-1)^m \frac{B_{2m}}{2m!}\, v^{2m-1} \\ &\quad -(-1)^m \frac{v^{2m-1}}{(2m-1)!} \sum_1^\infty{}^{(\nu)} (-1)^\nu \frac{v^{2\nu+1}}{2\nu!} \cdot \frac{B_{2m+2\nu}}{2m+2\nu} \cdot \frac{1-\lambda_{2\nu}}{1+\lambda_{2\nu}} \cdot C_{2\nu}, \\ C_{2m-1} &= -(-1)^m \frac{v^{2m-2}}{(2m-2)!} \sum_1^\infty{}^{(\nu)} (-1)^\nu \\ &\qquad \cdot \frac{v^{2\nu}}{(2\nu-1)!} \cdot \frac{B_{2m+2\nu-2}}{2m+2\nu-2} \cdot \frac{1-\lambda_{2\nu-1}}{1+\lambda_{2\nu-1}} \cdot C_{2\nu-1}. \end{aligned}\right. \tag{36}$$

Bei der letzten dieser beiden Beziehungen tritt für $m = 1$ auf der rechten Seite noch eine Konstante $+1$ hinzu, die von dem Grenzwert von $\sin(m-1)\pi/(m-1)$ für $m = 1$ in (32) herrührt.

Von den beiden Parametern v und kr kann offenbar nur v für die Reihenentwickelung in Betracht kommen, da kr, wie man aus (36) ersieht, in sehr umständlichen, aus den λ_ν gebildeten Ausdrücken auftritt. Für $\mu = 1$ reduzieren sich diese zwar auf:

$$\frac{1-\lambda_\nu}{1+\lambda_\nu} = -\frac{J_{\nu+1}(kr)}{J_{\nu-1}(kr)}, \tag{37}$$

was aber für eine Entwickelung nach kr immer noch recht ungeeignet ist. Wir überzeugen uns noch durch Betrachtung des Falles $v = 0$, daß eine Entwickelung der c_ν nach negativen Potenzen von v den Bedingungen unseres Problems widerspricht. Der Parameter v verschwindet einerseits für

$r = 0$ und andererseits für $h = \infty$; im letzteren Fall reduzieren sich nach (7) und (9) alle G_ν auf $1/z^\nu$ bzw. $\log z$, d. h. unser Potential entspricht dem Fall des einzelnen geraden Drahtes. Innerhalb eines solchen ist bekanntlich $\mathfrak{H}_\varrho = 0$ und $\mathfrak{H}_\vartheta$ unabhängig von ϑ. Nach (4) müssen also für $h = \infty$ alle c_ν außer c_0 verschwinden oder gleich einer Konstanten werden, d. h. die c_ν und damit auch die C_ν sind nur nach positiven Potenzen von v entwickelbar. Die Betrachtung des Falles $r = 0$ führt zu demselben Resultat.

Die Methode, deren wir uns bei der Reihenentwickelung bedienen, besteht darin, daß wir die für die C_ν anzusetzenden Reihen auf beiden Seiten in die Ausdrücke (36) einführen und die Koeffizienten gleicher Potenzen von v vergleichen. Dieses Verfahren führt in unserem Fall zu endlichen, leicht angebbaren Rekursionsformeln, während offenbar der allgemeine Fall eines derartig definierten Systems von Funktionalgleichungen ein meist nicht auflösbares unendliches System linearer Gleichungen für die gesuchten Koeffizienten liefert. Es sei beiläufig bemerkt, daß unsere Gleichungen auch bezüglich des Parameters kr eine in diesem Sinn günstige Form haben; nur ist dann eben unsere Reihendarstellung für einigermaßen großes kr schon recht unbequem, während sie für ganz große Werte dieses Parameters und also auch für den interessanten Grenzfall unendlich hoher Schwingungszahlen völlig versagt.

Bei der Anwendung der genannten Methode müssen wir die beiden Gleichungen (36) getrennt behandeln; um ihren allgemeinen Aufbau besser hervortreten zu lassen, schreiben wir die erste derselben durch Einführung der Abkürzungen $a_\nu^{(2m)}$, die natürlich nichts mit den früheren Koeffizienten a_ν aus Gleichung (10) u. flg. und besonders (25) zu tun haben, folgendermaßen um:

$$(38)\quad \begin{cases} C_{2m} = v^{2m-1}\{a_0^{(2m)} + \sum_1^\infty{}^{(\nu)}\, a_\nu^{(2m)} \cdot v^{2\nu+1} \cdot C_{2\nu}\}, \\ a_0^{(2m)} = -2(-1)^m \dfrac{B_{2m}}{2m!}, \\ a_\nu^{(2m)} = -\dfrac{(-1)^{m+\nu}}{(2m-1)!\,2\nu!} \cdot \dfrac{B_{2m+2\nu}}{2m+2\nu} \cdot \dfrac{1-\lambda_{2\nu}}{1+\lambda_{2\nu}}. \end{cases}$$

Da die $C_{2\nu}$ nur nach positiven Potenzen von v entwickelt werden sollen, so ersieht man hieraus, daß v^{2m-1} die niedrigste in C_{2m} vorkommende Potenz von v ist; es fängt also die Entwickelung von C_2 mit v, von C_4 mit v^3, von C_6 mit v^5 an usf. Hiernach stellt v^4 in den Ausdrücken $v^{2\nu+1} C_{2\nu}$ und daher auch in der in (38) auftretenden Summe die niedrigste Potenz von v dar. In ähnlicher Weise überzeugt man sich ferner, daß in der genannten Summe die nächsthöhere Potenz v^8 lautet, und daß allgemein die Entwickelung der C_{2m} nach Potenzen von v^4 fortschreitet. Demnach hat man anzusetzen:

$$C_{2m} = v^{2m-1} \sum_{0}^{\infty}{}^{(p)} A_p^{(2m)} \cdot v^{4p}. \tag{39}$$

Der obere Index von A soll andeuten, daß der betreffende Koeffizient zur Entwickelung von C_{2m} gehört, während der untere Index die Stelle innerhalb dieser Reihe anzeigt. Aus (39) und (38) kommt nun:

$$\sum_{0}^{\infty}{}^{(p)} A_p^{(2m)} \cdot v^{4p} = a_0^{(2m)} + \sum_{1}^{\infty}{}^{(\nu)} \sum_{0}^{\infty}{}^{(\alpha)} a_\nu^{(2m)} \cdot A_\alpha^{(2\nu)} \cdot v^{4\nu+4\alpha},$$

und durch Koeffizientenvergleichung:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0^{(2m)} = a_0^{(2m)}, \\ A_p^{(2m)} = \sum_{1}^{p}{}^{(\nu)} a_\nu^{(2m)} \cdot A_{p-\nu}^{(2\nu)}. \end{array} \right. \tag{40}$$

Hieraus folgt für die ersten Koeffizienten der Entwickelung (39):

$$\begin{aligned} A_1^{(2m)} &= a_1^{(2m)} \cdot A_0^{(2)} = a_1^{(2m)} \cdot a_0^{(2)}, \\ A_2^{(2m)} &= a_1^{(2m)} \cdot A_1^{(2)} + a_2^{(2m)} \cdot A_0^{(4)}, \\ &= a_1^{(2m)} \cdot a_1^{(2)} \cdot a_0^{(2)} + a_2^{(2m)} \cdot a_0^{(4)}. \end{aligned}$$

Diese Koeffizienten werden jedoch mit zunehmendem unteren Index immer komplizierter; wir werden im Anschluß an die ähnlichen Verhältnisse bei der Entwickelung der C_{2m-1} auf die hieraus sich ergebenden Schwierigkeiten näher eingehen.

Indem wir für C_1 in dem zweiten Ausdruck (36) $C_1 - 1$ einführen, beseitigen wir die Ausnahmestellung, die dieser

Funktion dort zukommt, und erhalten nach Einführung entsprechender Abkürzungen $a_\nu^{(2m-1)}$ die folgende nunmehr für alle C_{2m-1} geltende Beziehung:

$$(41)\quad \begin{cases} C_{2m-1} = v^{2m}\{a_0^{(2m-1)} + \sum_1^\infty{}^{(\nu)} a_\nu^{(2m-1)} \cdot v^{2\nu-2} \cdot C_{2\nu-1}\}, \\ a_0^{(2m-1)} = \dfrac{(-1)^m}{(2m-2)!} \cdot \dfrac{B_{2m}}{2m} \cdot \dfrac{1-\lambda_1}{1+\lambda_1}, \\ a_\nu^{(2m-1)} = -\dfrac{(-1)^{m+\nu}}{(2m-2)!\,(2\nu-1)!} \cdot \dfrac{B_{2m+2\nu-2}}{2m+2\nu-2} \cdot \dfrac{1-\lambda_{2\nu-1}}{1+\lambda_{2\nu-1}}. \end{cases}$$

Dabei besteht also für $m > 1$ die Definition (35), während man für C_1 hat:

$$(42)\qquad C_1 = (1+\lambda_1)c_1 - 1.$$

In ähnlicher Weise wie früher findet man aus (41), daß die Entwickelung der C_{2m-1} mit v^{2m} beginnt und im Gegensatz zu derjenigen der C_{2m} nach Potenzen von v^2 fortschreitet. Wir setzen also:

$$(43)\qquad C_{2m-1} = v^{2m} \sum_0^\infty{}^{(p)} A_p^{(2m-1)} \cdot v^{2p},$$

so daß (41) liefert:

$$\sum_0^\infty{}^{(p)} A_p^{(2m-1)} \cdot v^{2p} = a_0^{(2m-1)} + \sum_1^\infty{}^{(\nu)} \sum_0^\infty{}^{(\alpha)} a_\nu^{(2m-1)} \cdot A_\alpha^{(2\nu-1)} \cdot v^{4\nu+2\alpha-2}.$$

Aus der Koeffizientenvergleichung folgt hier:

$$(44)\quad \begin{cases} A_0^{(2m-1)} = a_0^{(2m-1)}, \\ A_{2p}^{(2m-1)} = \sum_1^p{}^{(\nu)} a_\nu^{(2m-1)} \cdot A_{2p-2\nu+1}^{(2\nu-1)}, \\ A_{2p-1}^{(2m-1)} = \sum_1^p{}^{(\nu)} a_\nu^{(2m-1)} \cdot A_{2p-2\nu}^{(2\nu-1)}. \end{cases}$$

Daraus ergibt sich für die ersten Koeffizienten:

$$A_1^{(2m-1)} = a_1^{(2m-1)} \cdot A_0^{(1)} = a_1^{(2m-1)} \cdot a_0^{(1)},$$
$$A_2^{(2m-1)} = a_1^{(2m-1)} \cdot A_1^{(1)} = a_1^{(2m-1)} \cdot a_1^{(1)} \cdot a_0^{(1)}.$$

Auch diese Koeffizienten werden ähnlich wie die früheren mit wachsendem unteren Index immer komplizierter, so daß

eine einfache Darstellung derselben in guter Näherung sehr erwünscht wäre. Hierzu sind aber einerseits die überall als Faktor auftretenden Ausdrücke $1 - \lambda_\nu / 1 + \lambda_\nu$ und andererseits die vielfachen Produkte Bernoullischer Zahlen, aus denen die einzelnen Glieder der A gebildet sind, zu kompliziert. Es kann sich also bei allen auf die A bezüglichen Näherungsbetrachtungen nur um ganz rohe Schätzungen handeln.

Da die Frage nach der Konvergenz von (39) und (43) wegen der komplizierten Gestalt der A nicht ganz abgewiesen werden konnte, so habe ich in dem eben charakterisierten Sinne Näherungsbetrachtungen angestellt und in einen am Schluß dieser Arbeit wiedergegebenen Anhang verwiesen. Über die hier in Rede stehenden Koeffizienten A kann man daraus allerdings nur auf einem Umweg Aufschluß erhalten. Ich bin nämlich von den Reihen ausgegangen, die entstehen, wenn man in (39) und (43) statt der A deren Absolutwerte setzt. Indem ich hierin für die $|A|$ viel größere aber bequem darstellbare Koeffizienten P einführte, konnte ich zeigen, daß unsere Reihen im Falle der C_{2m} für Werte von $v < 2{,}8$ und im Falle der C_{2m-1} für solche von $v < 2{,}56$ sicher konvergieren müssen. Damit ist natürlich nicht gesagt, daß (39) und (43) für größere Werte von v divergieren; das obige Kriterium ist aber für die Praxis schon vollständig ausreichend, da die Werte $v = 2{,}8$ bzw. $v = 2{,}56$ schon dem praktisch unmöglichen Fall blanker, dicht aneinander gewickelter Drähte ($v = \pi$) sehr nahe kommen. Wie oben angedeutet, kann man aus der hiernach zu vermutenden Konvergenz unserer Reihen bis annähernd $v = \pi$ nun umgekehrt schließen, daß die Koeffizienten A mit wachsendem unteren Index beständig kleiner werden, und zwar in (39) annähernd wie π^{-4p} und in (43) annähernd wie π^{-2p}.

Als mathematisches Nebenresultat erhalten wir nach Sommerfeld[2]) aus der obigen Koeffizientenberechnung die Lösung einer Abbildungsaufgabe, wie sie in Fig. 2a und 2b dargestellt ist. Es ist nämlich, wie man aus (15) mit Rücksicht auf die Eigentümlichkeit der dort auftretenden Konstante ersieht, in der z-Ebene $V = \pm h/2$ auf der Geraden $y = \pm h/2$ und dem (oberen–unteren) Ufer des in Fig. 2a angebrachten

1) A. Sommerfeld, l. c. p 624.

Verzweigungsschnittes; auf der Geraden $y = 0$, $x > 0$ ist $V = 0$. Ferner ist für unendlich hohe Schwingungszahl an der Drahtoberfläche

$$\mu \mathfrak{H}_\varrho = \frac{\partial V}{\partial \varrho} = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial U}{\partial \vartheta} = 0 ,$$

d. h. auf dem Kreis in Fig. 2a ist $U = \text{const.}$; wir können sagen $U = 0$.

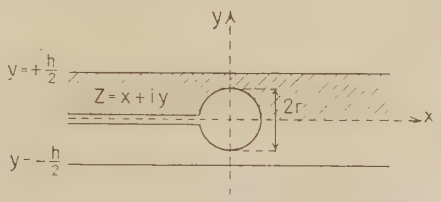

Fig. 2a.

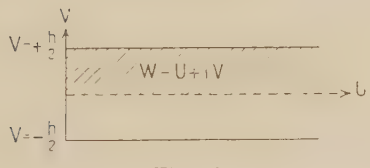

Fig. 2b.

Demnach durchläuft für $k = \infty$ die Funktion:

$$(45) \quad \left| \begin{array}{l} W = U + iV = \sum_0^\infty (\nu)\, a_\nu (k = \infty)\, G_\nu \\ \\ \quad = \frac{h}{2\pi} G_0 - \sum_0^\infty (\nu)\, r^{\nu+1} \cdot \frac{c_\nu (k = \infty)}{2\nu} \cdot G_\nu , \end{array} \right.$$

die Begrenzung des (schraffierten–unschraffierten) Gebietes von Fig. 2b, wenn $z = x + iy$ diejenige des (schraffierten-unschraffierten) Gebietes von Fig. 2a beschreibt; d. h. W bildet den Fundamentalbereich von Fig. 2a auf denjenigen von Fig. 2b ab.[1])

1) Die hier gefundene Abbildungsaufgabe gehört in die Theorie der automorphen Funktionen, ohne jedoch mit den Hilfsmitteln der letzteren behandelt zu sein. Man kann ersichtlich auf dem oben betretenen Weg auch leicht das Problem einer ebenen Strömung gegen ein Gitter aus parallelen Drähten für beliebige Werte des Verhältnisses r/h (vgl. Fig. 1) lösen.

Für $k = \infty$ ändert sich unsere obige Berechnung der c_ν nur insofern, als die λ_ν verschwinden und also die Ausdrücke $1-\lambda_\nu/1+\lambda_\nu$ alle gleich 1 werden; die Funktion W ist also bekannt.

Bei Sommerfeld ist nur der Fall $v = \pi$ und zwar im umgekehrten Sinn behandelt. Hier wird zuerst die Abbildungsfunktion W mittels elliptischer Funktionen dargestellt und so die Koeffizienten von V bestimmt, woraus sich die c_ν dann berechnen lassen.

§ 4. Widerstand und innere Selbstinduktion.

Bezüglich des Widerstandes haben wir zunächst nur zu wiederholen, was bei Sommerfeld schon gesagt ist. Wenn $\mathfrak{S}$ den Poyntingschen Vektor darstellt, so gibt der zeitliche Mittelwert (Index m)

$$r\left(\int_0^{2\pi} \mathfrak{S}\, d\vartheta\right) m$$

die pro Längeneinheit im Draht entwickelte Joulesche Wärme an und ist daher proportional dem Widerstand w. Also ist:

$$\frac{w}{w_0} = \frac{\left(\int \mathfrak{S}\, d\vartheta\right) m}{\left(\int \mathfrak{S}_0\, d\vartheta\right) m}, \tag{46}$$

wobei der Index 0 andeutet, daß die betreffende Größe für Gleichstrom ($k = 0$) zu nehmen ist. Die Integration über den Poyntingschen Vektor vereinfacht sich bedeutend, wenn man zuerst dessen zeitlichen Mittelwert bildet. Es ist ja $\mathfrak{S}$ proportional mit $\mathfrak{R}(\mathfrak{E})\cdot\mathfrak{R}(\mathfrak{H}_\vartheta)$, d. h. proportional mit

$$\tfrac{1}{4}(\mathfrak{E}+\bar{\mathfrak{E}})(\mathfrak{H}_\vartheta+\bar{\mathfrak{H}}_\vartheta);$$

der Strich über $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}_\vartheta$ bedeutet dabei in üblicher Weise, daß die konjugiert komplexen Größen zu nehmen sind. Führt man das vorstehende Produkt aus, so verschwinden bei der Mittelung die beiden mit $e^{\pm 2int}$ behafteten Terme, und es bleibt:

$$\tfrac{1}{4}\int_0^{2\pi} (\mathfrak{E}\,\bar{\mathfrak{H}}_\vartheta + \bar{\mathfrak{E}}\,\mathfrak{H}_\vartheta)_{\varrho=r}\, d\vartheta.$$

Die Ausführung dieses Integrales liefert nach (2) und (4) die im folgenden mehrfach zu verwendenden Beziehungen:

$$(47)\quad \begin{cases} \int_0^{2\pi} (\mathfrak{E}\,\bar{\mathfrak{H}}_\vartheta)_{\varrho=r}\, d\vartheta = -\dfrac{4\pi}{\sigma\cdot h^2}\cdot J^2 \sum_0^\infty{}^{(\nu)}\, p_\nu\, c_\nu\, \bar{c}_\nu \dfrac{k\cdot J_\nu(k\,r)}{J_\nu'(k\,r)}, \\ \int_0^{2\pi} (\bar{\mathfrak{E}}\,\mathfrak{H}_\vartheta)_{\varrho=r}\, d\vartheta = -\dfrac{4\pi}{\sigma\cdot h^2}\cdot J^2 \sum_0^\infty{}^{(\nu)}\, p_\nu\, c_\nu\, \bar{c}_\nu \dfrac{\bar{k}\cdot J_\nu(\bar{k}\,r)}{J_\nu'(\bar{k}\,r)}. \end{cases}$$

Dabei ist $k^2 = -\bar{k}^2$ und:

$$p_\nu = 2\pi \text{ für } \nu = 0, \quad p_\nu = \pi \text{ für } \nu > 0.$$

Für $k = 0$ reduzieren sich die vorstehenden Ausdrücke auf das erste Glied, und eine einfache Rechnung zeigt, daß sich nach (46) für das Verhältnis Wechselstromwiderstand : Gleichstromwiderstand die Sommerfeldsche Formel ergibt:

$$(48)\quad \frac{w}{w_0} = -\frac{r}{2}\left(\Re\left\{\frac{k\,J_0(k\,r)}{J_0'(k\,r)}\right\} + \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi r}{h}\right)^2 \sum_1^\infty{}^{(\nu)}\, c_\nu\, \bar{c}_\nu\, \Re\left\{\frac{k\,J_\nu(k\,r)}{J_\nu'(k\,r)}\right\}\right).$$

Die Selbstinduktion L wird durch den zeitlichen Mittelwert des Stromes J und der Energie W des magnetischen Feldes so definiert:

$$M(W) = \frac{\mu}{8\pi}\int M(|\mathfrak{H}|^2)\, dS = \frac{L}{2}\, M(J^2).$$

Je nachdem man das vorstehende Energieintegral nur über den Raum außerhalb der stromführenden Leiter oder nur über diese selbst erstreckt, kann man eine äußere und innere Selbstinduktion definieren; beachtet man, daß $M(J^2) = J^2/2$, so kommt:

$$(49)\qquad M(W_i) = \frac{L_i}{4} J^2, \quad M(W_a) = \frac{L_a}{4} J^2,$$

so daß $L = L_i + L_a$.

Wir beschäftigen uns vorerst mit der inneren Selbstinduktion. Das dieser entsprechende Energieintegral kann nach dem Greenschen Satz in ein Oberflächenintegral verwandelt werden, und zwar auf folgende Weise. Es ist in Polarkoordinaten ϱ, ϑ, wenn u eine ganz beliebige stetige Funktion bedeutet:

$$(50)\quad \int u\,\Delta u\, dS + \int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \varrho}\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right)^2\right] dS = \int u\,\frac{\partial u}{\partial \varrho}\, d\sigma;$$

dabei ist ϱ als nach außen gerichtete Normale genommen. Setzt man jetzt:

$$(51)\qquad \begin{cases} u = \Re\left(\frac{1}{k^2}\,\mathfrak{E}\right) = \Re\left\{\frac{1}{-i\,|k^2}\,\mathfrak{E}\right\} \\ \quad = -\,\frac{1}{k\cdot\bar{k}}\,\Im\mathfrak{m}(\mathfrak{E}), \end{cases}$$

so folgt aus (1):

$$\Delta u = \Re\left\{\frac{1}{k^2}\,\Delta\,\mathfrak{E}\right\} = -\,\Re(\mathfrak{E})$$

und aus (3):

$$\frac{\partial u}{\partial \varrho} = -\,\frac{1}{4\pi\sigma}\,\Re(\mathfrak{H}_\vartheta), \qquad \frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial u}{\partial \vartheta} = \frac{1}{4\pi\sigma}\,\Re(\mathfrak{H}_\varrho).$$

Beachtet man, daß:

$$W_i = \frac{\mu}{8\pi}\cdot\int\{\Re(\mathfrak{H}_\vartheta)^2 + \Re(\mathfrak{H}_\varrho)^2\}\,dS,$$

so kommt durch Einsetzen in (50):

$$(52)\qquad \begin{cases} \frac{\mu}{k\cdot\bar{k}}\int_0^r\int_0^{2\pi}\Im\mathfrak{m}(\mathfrak{E})\cdot\Re(\mathfrak{E})\cdot\varrho\,d\varrho\,d\vartheta + \frac{8\pi}{(4\pi\sigma)^2}\,W_i \\ \qquad = \frac{\mu}{k\cdot\bar{k}}\cdot\frac{r}{4\pi\sigma}\int_0^{2\pi}\Im\mathfrak{m}(\mathfrak{E})_{\varrho=r}\cdot\Re(\mathfrak{H}_\vartheta)_{\varrho=r}\cdot d\vartheta. \end{cases}$$

Da $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ in der Längsrichtung des Drahtes nicht veränderlich sind, so haben wir in (52) das Raumintegral nur über die Querschnittfläche des Drahtes erstreckt und erhalten damit in W_i die innere Energie pro Längeneinheit des Drahtes. Das in (52) noch enthaltene Raumintegral fällt nun bei der Mitteilung fort, denn es ist:

$$\Im\mathfrak{m}(\mathfrak{E})\cdot\Re(\mathfrak{E}) = \frac{1}{4i}(\mathfrak{E}-\bar{\mathfrak{E}})(\mathfrak{E}+\bar{\mathfrak{E}}) = \frac{1}{4i}(\mathfrak{E}^2-\bar{\mathfrak{E}}^2),$$

so daß beide Terme bzw. mit $e^{\pm 2int}$ behaftet sind. Auch das rechtsstehende Integral in (52) erfährt bei der zeitlichen Mittelung bedeutende Vereinfachungen; hier ist:

$$\Im\mathfrak{m}(\mathfrak{E})\,\Re(\mathfrak{H}_\vartheta) = \frac{1}{4i}(\mathfrak{E}-\bar{\mathfrak{E}})(\mathfrak{H}_\vartheta+\bar{\mathfrak{H}}_\vartheta)$$

$$= \frac{1}{4i}(\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}_\vartheta - \mathfrak{E}\,\bar{\mathfrak{H}}_\vartheta + \mathfrak{E}\,\mathfrak{H}_\vartheta - \bar{\mathfrak{E}}\,\mathfrak{H}_\vartheta).$$

Die beiden ersten Terme der Klammer fallen bei der Mittelung wieder fort, die beiden anderen sind dagegen von der Zeit unabhängig. Demnach vereinfacht sich (52) zu:

$$M(W_i) = -\frac{r \cdot \sigma \cdot \mu}{8 \cdot k^2} \int_0^{2\pi} (\mathfrak{E}\,\bar{\mathfrak{H}}_\vartheta - \bar{\mathfrak{E}}\,\mathfrak{H}_\vartheta)_{\varrho=r}\, d\vartheta . \tag{53}$$

Diese beiden Integrale sind in (47) berechnet; beachtet man, daß $k^2 = -\bar{k}^2$, so kommt:

$$\left\{ \begin{aligned} M(W_i) = \frac{\mu J^2}{2r} \Bigg(& \Re \left\{ \frac{J_0(kr)}{k J_0'(kr)} \right\} \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{2\pi r}{h} \right)^2 \sum_1^\infty{}^{(\nu)}\, c_\nu \bar{c}_\nu \Re \left\{ \frac{J_\nu(kr)}{k J_\nu'(kr)} \right\} \Bigg) . \end{aligned} \right. \tag{54}$$

Hieraus kann mit Rücksicht auf (49) der Ausdruck für die innere Selbstinduktion leicht abgelesen werden.

Wir wollen im Anschluß hieran noch einen Teil des äußeren Energieintegrals berechnen, der sich ganz mit den gleichen Mitteln behandeln läßt. Die äußere Energie drückt sich nach dem Greenschen Satz durch das magnetische Potential V (vgl. die Definition (6) desselben) so aus:

$$W_a = \frac{1}{8\pi} \int \Re \left\{ \frac{4\pi J e^{int}}{h} \cdot V \right\} \cdot \Re \left\{ \frac{4\pi J e^{int}}{h} \cdot \frac{\partial V}{\partial n} \right\} d\sigma . \tag{55}$$

Das Integral ist über die Begrenzung des ganzen Raumes zu erstrecken, dessen Energie bestimmt werden soll. Wir werden uns im nächsten Paragraphen damit eingehender zu beschäftigen haben, hier genüge, zu bemerken, daß jedenfalls die Oberfläche des Drahtes zu dieser Begrenzung gehört. Das über die Längeneinheit desselben erstreckte Integral lautet wegen $4\pi J e^{int}/h \cdot \partial V/\partial \varrho = \mu\, \mathfrak{H}_\varrho$ und $dn = -d\varrho$:

$$W_a^{(1)} = -\frac{r\mu}{8\pi} \int \Re \left\{ \frac{4\pi J e^{int}}{h} \cdot V \right\} \cdot \Re\,(\mathfrak{H}_\varrho)\, d\vartheta . \tag{55a}$$

Nun ist an der Oberfläche des Drahtes wegen (6) und (4):

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{4\pi J e^{int}}{h} \cdot V &= r \int_0^\vartheta \mathfrak{H}_\vartheta\, d\vartheta \\ &= \frac{4\pi r}{h} J e^{int} \left\{ c_0 \vartheta + \sum_1^\infty{}^{(\nu)}\, \frac{c_\nu}{\nu} \sin \nu\vartheta \right\} . \end{aligned} \right. \tag{56}$$

Führen wir für die linke Seite von (56) zur Abkürzung $\mathfrak{V}$ ein, so ist:

$$\Re(\mathfrak{V}) \cdot \Re(\mathfrak{H}_\varrho) = \tfrac{1}{4}(\mathfrak{V} + \bar{\mathfrak{V}})(\mathfrak{H}_\varrho + \bar{\mathfrak{H}}_\varrho)$$
$$= \tfrac{1}{4}(\mathfrak{V}\mathfrak{H}_\varrho + \mathfrak{V}\bar{\mathfrak{H}}_\varrho + \mathfrak{V}\bar{\mathfrak{H}}_\varrho + \bar{\mathfrak{V}}\mathfrak{H}_\varrho).$$

Bei der zeitlichen Mittelung fallen wieder die ersten beiden Terme fort, und es bleibt nach (55a):

$$(57) \qquad M(W_a^{(1)}) = -\frac{r \cdot \mu}{32\pi} \cdot \int_{-\pi}^{+\pi} (\mathfrak{V}\bar{\mathfrak{H}}_\varrho + \bar{\mathfrak{V}}\mathfrak{H}_\varrho)_{\varrho=r}\, d\vartheta .$$

Beachtet man bei der Ausführung der Integration, daß:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \vartheta \sin \nu\vartheta \, d\vartheta = (-1)^{\nu+1} \frac{2\pi}{\nu},$$

so erhält man aus (56) und (4):

$$\int_0^{2\pi} \mathfrak{V}\bar{\mathfrak{H}}_\varrho \, d\vartheta = -2\pi c_0 \left(\frac{4\pi J}{h}\right)^2 \sum_1^\infty (\nu)(-1)^\nu \bar{c}_\nu \frac{J_\nu(\bar{k}r)}{\bar{k} J_\nu'(\bar{k}r)}$$
$$+ \pi \left(\frac{4\pi J}{h}\right)^2 \sum_1^\infty (\nu) c_\nu \bar{c}_\nu \frac{J_\nu(\bar{k}r)}{\bar{k} J_\nu(\bar{k}r)}$$

$$\int_0^{2\pi} \bar{\mathfrak{V}}\mathfrak{H}_\varrho \, d\vartheta = -2\pi c_0 \left(\frac{4\pi J}{h}\right)^2 \sum_1^\infty (\nu)(-1)^\nu c_\nu \frac{J_\nu(kr)}{k J_\nu'(kr)}$$
$$+ \pi \left(\frac{4\pi J}{h}\right)^2 \sum_1^\infty (\nu) c_\nu \bar{c}_\nu \frac{J_\nu(kr)}{k J_\nu'(kr)}$$

und endlich aus (57):

$$(58) \quad \left\{ M(W_a^{(1)}) = \frac{\mu J^2}{2r} \left(\frac{2\pi r}{h} \sum_1^\infty (\nu)(-1)^\nu \Re\left\{ c_\nu \frac{J_\nu(kr)}{k J_\nu'(kr)} \right\} \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi r}{h}\right)^2 \sum_1^\infty (\nu) c_\nu \bar{c}_\nu \Re\left\{ \frac{J_\nu(kr)}{k J_\nu'(kr)} \right\} \right).$$

Bei der Addition von (54) und (58) fällt die letzte Summe weg und man erhält:

$$(59) \qquad M(W_i + W_a^{(1)}) = \frac{\mu\pi}{h} \cdot J^2 \cdot \sum_0^\infty (\nu)(-1)^\nu \Re\left\{ c_\nu \frac{J_\nu(kr)}{k J_\nu'(kr)} \right\} .$$

Da wir auf die Berechnung der gesamten Selbstinduktion $L = L_i + L_a$ ausgehen, so werden wir im folgenden nur mit dem einfacheren Ausdruck (59) zu operieren haben statt mit (54) und (58).

§ 5. Die äußere Selbstinduktion.

Um den Rest des Energieintegrales (55) ausführen zu können, ist es nötig, die in der Einleitung angedeutete Umrechnung des ebenen Potentials (15) in den entsprechenden räumlichen Potentialausdruck durchzuführen. Hierbei treten an Stelle der parallelen Drähte parallel übereinander angeordnete Kreisringe von der gleichen Beschaffenheit des Drahtes und einem Ringradius, der gleich dem Windungsradius der Spule zu nehmen ist. Zur Aufstellung des hierfür geltenden allgemeinen Potentialansatzes führen wir Zylinderkoordinaten ϱ', y ein, derart, daß die frühere y-Koordinate erhalten bleibt, während ϱ' im wesentlichen an die Stelle von x tritt.

Man hat demnach im Gebiet außerhalb der Ringe die Gleichung:

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial \varrho'^2} + \frac{1}{\varrho'}\frac{\partial V}{\partial \varrho'} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

zu erfüllen. Setzt man als partikuläres Integral derselben an:

$$V_s = \sin 2\pi s \frac{y}{h} \cdot f_s(\varrho'),$$

so müssen die Funktionen $f_s(\varrho')$ der Gleichung

$$f_s''(\varrho') + \frac{1}{\varrho'} f_s'(\varrho') - \left(\frac{2\pi s}{h}\right)^2 \cdot f_s(\varrho') = 0$$

genügen, d. h. wenn C_0 eine der Zylinderfunktionen vom Index 0 bedeutet:

$$f_s(\varrho') = C_0\left(2\pi i s \frac{\varrho'}{h}\right).$$

Bedeutet R den Spulenradius (= Ringradius) und bezeichnet man den Raum $\varrho' \lessgtr R$ als das Innere bzw. Äußere der Spule, so hat man als C_0 für das Innere die für verschwindendes Argument ($\varrho' = 0$) endlich bleibende Besselsche und für das Äußere die für unendlich großes positiv imaginäres Argument

($\varrho' = \infty$) verschwindende erste Henkelsche Funktion zu nehmen. Dann genügt der in Analogie zu (15) gebildete Ansatz:

$$(60)\quad \begin{cases} \varrho' < R \quad V = y + \dfrac{h}{2\pi} \sum_1^\infty {}^{(s)}\alpha_s \sin 2\pi s \dfrac{y}{h} \cdot \dfrac{J_0\left(2\pi i s \dfrac{\varrho'}{h}\right)}{J_0\left(2\pi i s \dfrac{R}{h}\right)}, \\ \varrho' > R \quad V = \text{const.} + \dfrac{h}{2\pi} \sum_1^\infty {}^{(s)}\beta_s \sin 2\pi s \dfrac{y}{h} \cdot \dfrac{H_0^{(1)}\left(2\pi i s \dfrac{\varrho'}{h}\right)}{H_0^{(1)}\left(2\pi i s \dfrac{R}{h}\right)} \end{cases}$$

den Bedingungen unseres Potentials in der Spulenmitte und im Unendlichen des Außenraumes.

Wir sehen von einer allgemeinen Behandlung dieses Potentials ab, die sich übrigens auf eine tiefer gehende Konstruktion der allgemeinen Lösung mittels der früher benutzten Maxwellschen Methode stützen müßte, und behandeln nur den praktisch allein in Betracht kommenden Fall $R \gg h$.

Da unter dieser Voraussetzung das Argument der Besselschen bzw. Hankelschen Funktionen in der Umgebung von $\varrho' = R$ eine große Zahl ist, so kann gesetzt werden:

$$(60')\quad \begin{cases} \varrho' < R \quad \dfrac{J_0\left(2\pi i s \dfrac{\varrho'}{h}\right)}{J_0\left(2\pi i s \dfrac{R}{h}\right)} = \sqrt{\dfrac{R'}{\varrho'}} \cdot e^{+2\pi s \frac{\varrho' - R}{h}}, \\ \varrho' > R \quad \dfrac{H_0^{(1)}\left(2\pi i s \dfrac{\varrho'}{h}\right)}{H_0^{(1)}\left(2\pi i s \dfrac{R}{h}\right)} = \sqrt{\dfrac{R'}{\varrho'}} \cdot e^{-2\pi s \frac{\varrho' - R}{h}}, \end{cases}$$

d. h. in der Umgebung von $\varrho' = R$, also insbesondere an der Ringoberfläche besitzt das Potential (60) dieselbe Gestalt wie (15); erst in größerer Entfernung davon nach innen oder nach außen weichen beide Ausdrücke erheblich voneinander ab.

Zur Aufstellung der Grenzbedingungen wäre nun die im Innern des Drahtes bestehende Gleichung (1) in Ringkoordinaten zu integrieren; man ersieht aber unschwer, daß für

$R \gg h$ der frühere Ansatz (2) für $\mathfrak{E}$ bestehen bleiben kann. Die Grenzbedingungen (20) gelten also, da hierbei von (60) nur der Wert an der Ringoberfläche in Betracht kommt, mit ganz geringen Vernachlässigungen auch in unserem jetzigen Fall. An der aus (20) folgenden Koeffizientenbestimmung ändert sich ebenfalls nichts, so daß die jetzigen c_ν, wie auch die α_s und β_s dieselben sind wie früher. Die vorstehenden Überlegungen gelten natürlich alle nur näherungsweise; wir können daher auch von der noch übrig bleibenden Bedingung der Stetigkeit von V und $\partial V/\partial \varrho'$ für $\varrho' = R$ nur verlangen, daß sie näherungsweise erfüllt ist, wovon man sich nach dem Obigen leicht überzeugen kann.

Da für den Fall $R \sim h$ die früheren Koeffizienten α_s und β_s offenbar nicht mehr anwendbar sind, so gelten alle folgenden auf (60) gegründeten Rechnungen nur unter der einschränkenden Voraussetzung, daß $R \gg h$.

Wir definieren nun die Selbstinduktion pro Ganghöhe durch die Energie des Raumausschnitts, der durch die Ebenen $y = +h/2$ und $y = -h/2$ begrenzt ist. Die hierzu gehörige Energie innerhalb des Drahtes ist in (54) schon für die Längeneinheit des Drahtes berechnet. Auch der Wert des über die Oberfläche des Drahtes erstreckten Integrals (55) ist in (58) ebenfalls für die Längeneinheit des Drahtes schon gefunden. Wir haben demnach (59) nur mit $2\pi R$ zu multiplizieren, um den auf den Draht bezüglichen Beitrag zum Energieintegral zu erhalten. Bei der Integration über den Rest der Begrenzung unseres Raumausschnittes ist zu beachten, daß (60) an der vom Drahte aus nach außen hin erstreckten Ebene $y = 0$ unstetig wird. Wir bringen deshalb längs dieser Ebene einen Verzweigungsschnitt an und haben das Integral (55) außer über die beiden Ebenen $y = +h/2$ und $y = -h/2$ auch über die beiden Ufer dieses Verzweigungsschnittes zu nehmen (vgl. p. 41); zur anschaulicheren Vorstellung dieser Verhältnisse sei auf Fig. 2a hingewiesen, die sich allerdings auf den Fall unendlich großen Spulenradius bezieht.

Wir bezeichnen mit $W_a^{(2)}$ bzw. $W_a^{(3)}$ das Integral über den im Inneren bzw. Äußeren der Spule liegenden Teil der beiden Ebenen $y = +h/2$ und $y = -h/2$; beachtet man, daß $d\sigma = 2\pi\varrho'\,d\varrho'$, zu setzen ist, so kommt:

$$(61)\qquad \begin{cases} W_a^{(2)} = \frac{1}{4}\int_0^R \Re(\mathfrak{V})\,\Re\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n}\right)\varrho'\,d\varrho'; \\ W_a^{(3)} = \frac{1}{4}\int_R^\infty \Re(\mathfrak{V})\,\Re\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n}\right)\varrho'\,d\varrho'. \end{cases}$$

Beide Integrale sind über die entsprechenden Gebiete sowohl der Ebene $y + h/2$ als $y = -h/2$ zu erstrecken. Normale ist in unserem Falle die y-Richtung, bei der oberen Ebene im positiven, bei der unteren im negativen Sinn genommen; $\mathfrak{V}$ ist abkürzend für $4\pi J e^{int}/h \,.\, V$ gesetzt. Nun ist nach (60):

$$\mathfrak{V}_{y=+\frac{h}{2}} = -\,\mathfrak{V}_{y=-\frac{h}{2}} = 2\pi J e^{int},$$

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n}\right)_{\text{oben}} = -\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n}\right)_{\text{unten}} = \left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y}\right)_{y=+\frac{h}{2}};$$

da ferner:

$$\Re(\mathfrak{V}).\,\Re\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n}\right) = \tfrac{1}{4}(\mathfrak{V} + \bar{\mathfrak{V}})\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n} + \frac{\partial \bar{\mathfrak{V}}}{\partial n}\right)$$

und bei zeitlicher Mittelung

$$= \tfrac{1}{4}\left(\mathfrak{V}\,\frac{\overline{\partial \mathfrak{V}}}{\partial n} + \bar{\mathfrak{V}}\,\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n}\right),$$

so kommt für die beiden Integrale (61), wenn man über obere und untere Ebene zugleich integriert:

$$(62)\qquad M(W_a^{(2)}) = \frac{2\pi^2 J^2}{h}\int_0^R \Re\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{y=+\frac{h}{2}} \cdot \varrho' \cdot d\varrho',$$

$$(63)\qquad M(W_a^{(3)}) = \frac{2\pi^2 J^2}{h}\int_R^\infty \Re\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{y=+\frac{h}{2}} \cdot \varrho'\,d\varrho'.$$

Für das Folgende empfiehlt es sich aber, in (62) nur bis $R - \delta R$ und in (63) nur von $R + \delta R$ ab zu integrieren und den Grenzübergang zu $\delta R = 0$ erst zum Schluß vorzunehmen. Nach (60) hat man:

$$\varrho' < R\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{y=+\frac{h}{2}} = 1 + \sum_1^\infty{}^{(s)}(-1)^s \cdot s \cdot \alpha_s \cdot \frac{J_0\left(2\pi i s \frac{\varrho'}{h}\right)}{J_0\left(2\pi i s \frac{R}{h}\right)},$$

$$\varrho' > R\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{y=+\frac{h}{2}} = \sum_1^\infty{}^{(s)}(-1)^s \cdot s \cdot \beta_s \cdot \frac{H_0^{(1)}\left(2\pi i s \frac{\varrho'}{h}\right)}{H_0^{(1)}\left(2\pi i s \frac{R}{h}\right)}.$$

Da die Zylinderfunktionen $C_0(\alpha x)$ der Gleichung:

$$\frac{d}{dx}\left\{x\frac{dC_0(\alpha x)}{dx}\right\} = -\alpha^2 . x\, C_0(\alpha x) \tag{64}$$

genügen, so folgt:

$$\int x\, C_0(\alpha x)\, dx = -\frac{x}{\alpha} C_0'(\alpha x) + \text{const.} \tag{65}$$

Hiernach ist mit Rücksicht auf (60′):

$$\int_0^{R-\delta R} \frac{J_0\left(2\pi i s \frac{\varrho'}{h}\right)}{J_0\left(2\pi i s \frac{R}{h}\right)} \cdot \varrho'\, d\varrho'$$

$$= -\left[\frac{h\varrho'}{2\pi i s} \cdot \frac{J_0'\left(2\pi i s \frac{\varrho'}{h}\right)}{J_0\left(2\pi i s \frac{R}{h}\right)}\right]_0^{R-\delta R} = \frac{hR}{2\pi s} \cdot e^{-2\pi s \frac{\delta R}{h}},$$

und ähnlich:

$$\int_{R+\delta R}^{\infty} \frac{H_0^{(1)}\left(2\pi i s \frac{\varrho'}{h}\right)}{H_0^{(1)}\left(2\pi i s \frac{R}{h}\right)} \varrho'\, d\varrho'$$

$$= -\left[\frac{h\varrho'}{2\pi i s} \cdot \frac{H_0'^{(1)}\left(2\pi i s \frac{\varrho'}{h}\right)}{H_0^{(1)}\left(2\pi i s \frac{R}{h}\right)}\right]_{R-\delta R}^{\infty} = \frac{hR}{2\pi s} \cdot e^{-2\pi s \frac{\delta R}{h}}.$$

Also kommt durch Addition von (62) und (63):

$$M(W_a^{(2)} + W_a^{(3)})$$

$$= \frac{J^2}{4}\left(\frac{4\pi^2 R^2}{h} + 4\pi R \sum_1^{\infty (s)} (-1)^s \Re(\alpha_s + \beta_s) e^{-2\pi s \frac{\delta R}{h}}\right). \tag{66}$$

Nach (30) ist nun:

$$\sum_1^{\infty (s)} (-1)^s (\alpha_s + \beta_s) e^{-2\pi s \frac{\delta R}{h}}$$

$$= \sum_1^{\infty (\nu)} \frac{c_{2\nu-1}}{(2\nu-1)!} v^{2\nu}(1 - \lambda_{2\nu-1}) \cdot \sum_1^{\infty (s)} (-1)^s \cdot s^{2\nu-2} \cdot e^{-2\pi s \frac{\delta R}{h}}.$$

Die hier auftretenden Summen über s lassen sich nach (13) und (9) auf doppelte Weise durch die G_ν ausdrücken; es ist für $z = ih/2 + \delta R$:

$$G_{2\nu-1} = \frac{1}{(2\nu-2)!}\left(\frac{2\pi}{h}\right)^{2\nu-1} \cdot \sum_1^\infty{}^{(s)}(-1)^s \cdot s^{2\nu-2} \cdot e^{-2\pi s \frac{\delta R}{h}}$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{(m)} \frac{1}{\left(\delta R - i\frac{2m-1}{2}h\right)^{2\nu-1}}.$$

Im Grenzfall $\delta R = 0$ bleibt die linke Seite dieser Gleichung reell und jedes einzelne Glied der rechten Seite wird rein imaginär; der Grenzwert der fraglichen Summen ist also Null. Dies gilt jedoch nur für $\nu > 1$, denn für $\nu = 1$ müßte zu der Darstellung (9) noch eine Konstante hinzutreten, damit sie mit (13) identisch wird. Wir gehen hierfür zweckmäßig aus von der Maxwellschen Form (8) der nullten Gitterlösung und erhalten mit Rücksicht auf (11):

$$(66') \quad \begin{cases} G_1 = \left(\dfrac{dG_0}{dz}\right)_{z = i\frac{h}{2} + \delta R} = \dfrac{2\pi}{h} \cdot \dfrac{e^{2\pi\frac{\delta R}{h}}}{1 + e^{2\pi\frac{\delta R}{h}}} \\ \\ \quad = \dfrac{2\pi}{h} + \dfrac{2\pi}{h} \sum_0^\infty{}^{(s)}(-1)^s \cdot e^{-2\pi s \frac{\delta R}{h}}, \end{cases}$$

d. h. die Summe hat im Grenzfall $\delta R = 0$ den Wert $-1/2$, und man findet[1]):

$$\lim_{\delta R = 0} \sum_1^\infty{}^{(s)}(-1)^s(\alpha_s + \beta_s) e^{-2\pi s \frac{\delta R}{h}} = -\frac{v^2}{2}\, c_1 (1 - \lambda_1).$$

Der Ausdruck (66) reduziert sich also auf:

$$(67) \qquad M(W_a^{(2)} + W_a^{(3)}) = \frac{\pi^2 R^2}{h} \cdot J^2 \left(1 - \frac{r}{R} v\, \Re\{c_1(1 - \lambda_1)\}\right).$$

Bei dem nun noch übrig bleibenden über den Verzweigungsschnitt (vgl. Fig. 3) zu erstreckenden Integral ist zu beachten,

---

1) Man kann auch zeigen, daß nach (66') $G_1 - 2\pi/h$ gleich $-\pi/h$ plus einer ungeraden Funktion von $\xi = 2\pi s\, \delta R/h$ ist, so daß die geraden höheren Ableitungen nach ξ, die ja bis auf einen konstanten Faktor unsere Summen darstellen, mit $\xi = 0$ verschwinden.

daß am oberen Ufer ($y = +0$) die nach außen gerichtete Normale die negative y-Richtung ist, so daß:

$$\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n}\right)_{y=+0} = -\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n}\right)_{y=-0} = -\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial y}\right)_{y=0},$$

$$\mathfrak{V}_{y=+0} = -\mathfrak{V}_{y=-0} \qquad = 2\pi J e^{int}$$

und:

$$(68)\quad \begin{cases} M(W_a^{(4)}) = \frac{1}{4}\int\limits_{R+r}^{\infty} M\left(\Re(\mathfrak{V})\cdot\Re\left(\frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial n}\right)\right)\varrho'\,d\varrho' \\ \qquad\qquad = -\frac{2\pi^2 J^2}{h}\int\limits_{R+r}^{\infty}\Re\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{y=0}\cdot\varrho'\,d\varrho'. \end{cases}$$

Dabei ist nach (60) zu setzen:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{y=0} = \sum_1^{\infty}{}^{(s)}\, s\cdot\beta_s\cdot\frac{H_0^{(1)}\left(2\pi i s\frac{\varrho'}{h}\right)}{H_0^{(1)}\left(2\pi i s\frac{R}{h}\right)},$$

und da früher gefunden wurde:

$$\int\limits_{r+R}^{\infty}\frac{H_0^{(1)}\left(2\pi i s\frac{\varrho'}{h}\right)}{H_0^{(1)}\left(2\pi i s\frac{R}{h}\right)}\varrho'\,d\varrho' = \frac{h\,.\,R}{2\pi s}\cdot e^{-2\pi s\frac{r}{h}},$$

so kommt nach (68):

$$(69)\qquad M(W_a^{(4)}) = -\pi R\cdot J^2\cdot\sum_1^{\infty}{}^{(s)}\,\Re(\beta_s)\cdot e^{-vs}.$$

Hierin ist überall r gegen R vernachlässigt. Nach (16) und 25) ist nun:

$$(70)\quad \begin{cases} \sum\limits_1^{\infty}{}^{(s)}\beta_s e^{-vs} = -S_0 - \frac{v}{2}\sum\limits_1^{\infty}{}^{(\nu)}(-1)^{\nu}\binom{c_\nu}{\nu}\cdot(1-\lambda_\nu)S_\nu, \\ \text{wenn:} \\ \qquad S_\nu = \frac{v^\nu}{(\nu-1)!}\sum\limits_1^{\infty}{}^{(s)}\, s^{\nu-1}\cdot e^{-vs} \\ \text{und:} \\ \qquad S_0 = \sum\limits_1^{\infty}{}^{(s)}\frac{1}{s}e^{-vs}. \end{cases}$$

Für S_0 folgt aus (8) und (12), wenn $z = r$ gesetzt wird:

$$S_0 = -\log(1 - e^{-v}); \tag{70'}$$

hieraus können die S_ν durch Differentiation gewonnen werden, indem:

$$S_\nu = (-1)^\nu \frac{v^\nu}{(\nu - 1)!} \frac{d^\nu}{dv^\nu} S_0 . \tag{70''}$$

Diese Darstellung empfiehlt sich jedoch nur für $v < 5$; für größere v erhält man vorteilhafter aus (9) und (13), wenn wieder $z = r$ gesetzt wird:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{(m)} \frac{1}{(r - imh)^\nu} = \frac{1}{(\nu - 1)!} \left(\frac{2\pi}{h}\right)^\nu \sum_{1}^{\infty} {}^{(s)} s^{\nu-1} . e^{-vs},$$

d. h.

$$S_\nu = \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{(m)} \frac{1}{\left(1 - im\frac{h}{r}\right)^\nu} , \quad v > 1 . \tag{70'''}$$

Die S_ν sind ihrer Definition nach reell und haben hier eine nur scheinbar komplexe Gestalt. Wegen $h \geqq 2r$ konvergiert die vorstehende Reihe sehr schnell und reduziert sich für zunehmendes v auf das erste Glied, nämlich auf 1.

Bei der Addition von (67) und (69) kann das zweite Glied von (67) in die Summe (70) einbezogen werden, nur ist dann statt des aus (70″) folgenden Wertes für S_1 zu setzen:

$$S_1 = \frac{v}{1 - e^{-v}} . \tag{70''''}$$

Fügt man bei der genannten Addition noch den auf den Draht bezüglichen Beitrag (59) des Energienintegrals hinzu, so erhält man die gesamte Energie und damit auch nach (49) die gesamte Selbstinduktion pro Ganghöhe der Spule. Um unsere Formel symmetrischer schreiben zu können, führen wir in (59) die Abkürzung λ_ν (vgl. (20)) ein. Beachtet man, daß auf die Längeneinheit $1/h$ Windungen kommen, so findet man als gesamte Selbstinduktion pro Längeneinheit der Spule:

$$(71)\quad \begin{cases} L = \frac{4\pi^2 R^2}{h^2} + \frac{4\pi R}{h} \Delta L, \\ \Delta L = S_0 + v \sum_0^\infty {}^{(\nu)} (-1)^\nu \Re \left(\frac{c_\nu}{\nu} \lambda_\nu \right) \\ \qquad\qquad + \frac{v}{2} \sum_1^\infty {}^{(\nu)} (-1)^\nu \cdot \frac{S_\nu}{\nu} \Re \{ c_\nu (1 - \lambda_\nu) \}. \end{cases}$$

Dabei ist:

$$\lambda_0 = \frac{\mu}{kr} \frac{J_0(kr)}{J_0'(kr)}, \quad \lambda_\nu = \frac{\mu}{kr} \frac{\nu J_\nu(kr)}{J_\nu'(kr)};$$

S_0 ist aus (70′), S_1 aus (70‴) zu entnehmen und die übrigen S_ν aus (70″) oder (70‴).

An der in gewöhnlicher Weise berechneten Selbstinduktion $4\pi^2 R^2/h^2$ ist also eine Korrektion ΔL nach Maßgabe von (71) anzubringen.

§ 6. Andere Berechnungsweise von Widerstand und Selbstinduktion.

Im Hinblick auf die Ausführungen des nächsten Kapitels ist es nötig, noch eine andersartige Berechnung der Schwingungsgleichung durchzuführen, die zwar viel einfacher und eleganter ist als die obige, die aber den Nachteil besitzt, daß sie ganz andere und viel unbequemere Formeln liefert als wir sie in (48) und (71) erhalten haben. Die besondere Aufgabe dieses Paragraphen ist es daher, die Identität der neuen Formeln mit den früheren aufzuzeigen, was allerdings zum großen Teil die Rechnungen der §§ 4 und 5 voraussetzt.

Es wurde in der Einleitung gesagt, daß das elektrische Feld aus einem (wirbellosen) Potentialfeld $\mathfrak{U}$ und einem divergenzlosen Wirbelfeld $\mathfrak{R}$ stets so zusammengesetzt werden kann:

$$(72)\qquad \mathfrak{E} = \mathfrak{R} + \operatorname{grad} \mathfrak{U},$$

wobei also $\operatorname{div} \mathfrak{R} = 0$ und wegen $\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$ auch

$$\Delta \mathfrak{U} = 0.$$

Die Gleichheit der tangentialen Komponenten der elektrischen Kraft an der Oberfläche des Drahtes verlangt, daß:

$$(72')\qquad \mathfrak{E}_{\left(\substack{\varrho = r \\ \vartheta = \vartheta}\right)} = \left(\mathfrak{R}_s + \frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial s} \right)_{\text{Oberfl.}},$$

oder längs einer Windung integriert:

$$(73)\qquad 2\pi R \mathfrak{E}_{\left(\substack{\varrho = r \\ \vartheta = \vartheta}\right)} = \int (\mathfrak{R}\, ds) + \mathfrak{U}_2 - \mathfrak{U}_1.$$

$\mathfrak{U}_2 - \mathfrak{U}_1$ stellt dann die pro Windung erforderliche elektromotorische Kraft dar, die wir im Hinblick auf das in der Einleitung Gesagte mit E bezeichnen wollen.

Deformiert man in der öfters angegebenen Weise die schraubenförmige Windung in einen kreisförmigen Ring, so wird der erste Term rechts in (73) ein geschlossenes Linienintegral und es gilt nach dem Stokesschen Satz:

$$\int (\mathfrak{R}\, d\mathfrak{s}) = -\int \mu\, \dot{\mathfrak{H}}_n\, d\sigma. \tag{74}$$

($d\mathfrak{s}$ bedeutet das Element des geschlossenen Linienzuges, $d\sigma$ dasjenige der davon begrenzten Fläche.) Wir zerlegen dieses Flächenintegral mit Rücksicht auf die bequemere Ausführbarkeit in zwei Teile (vgl. Fig. 3a, die einen Ausschnitt aus Fig. 1 darstellt), die bzw. durch Rotation von AB und AP um die Spulenachse $B'BB''$ entstehen:

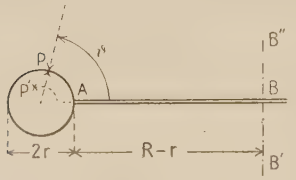

Fig. 3a.

$$\int \mu\, \dot{\mathfrak{H}}_n\, d\sigma = 2\pi \int_0^{R-r} \dot{\mathfrak{H}}_{\substack{y \\ (y=0)}}\, \varrho'\, d\varrho' + 2\pi R \cdot \int_0^{\vartheta} \mu\, \dot{\mathfrak{H}}_{\substack{\varrho \\ (\varrho=r)}} \cdot r\, d\vartheta. \tag{75}$$

Wegen (3) kommt:

$$r \int_0^{\vartheta} \mu\, \dot{\mathfrak{H}}_{\substack{\varrho \\ (\varrho=r)}}\, d\vartheta = -\int_0^{\vartheta} \left(\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial \vartheta}\right)_{(\varrho=r)} d\vartheta = \mathfrak{E}_{\substack{\varrho=r \\ \vartheta=0}} - \mathfrak{E}_{\substack{\varrho=r \\ \vartheta=\vartheta}}, \tag{75'}$$

also nach (75), (74) und (73):

$$E = 2\pi R\, \mathfrak{E}_{\substack{\varrho=r \\ \vartheta=0}} + 2\pi \int_0^{R-r} \dot{\mathfrak{H}}_{\substack{y \\ (y=0)}}\, \varrho'\, d\varrho', \tag{76}$$

wobei nach (60), (6) und unter Benutzung eines p. 39 ausgewerteten Integrales:

$$\left\{ 2\pi \int_0^{R-r} \dot{\mathfrak{H}}_{\substack{y \\ (y=0)}}\, \varrho'\, d\varrho' = i n \cdot J \cdot e^{i n t} \left(\frac{4\pi^2 (R-r)^2}{h} + 4\pi R \sum_1^{\infty} {}^{(s)}\alpha_s\, e^{-v s} \right). \right. \tag{75''}$$

Wir erhalten somit das für das Folgende bedeutsame Resultat, daß, wie zu erwarten war, die elektromotorische Kraft (= Randwerte des Potentials am Draht) auf der ganzen Peripherie des Drahtquerschnittes denselben Wert hat.

Schreibt man abkürzend:

$$(76') \qquad \begin{cases} 2\pi R\,\mathfrak{E}_{\binom{\varrho=r}{\vartheta=0}} = J e^{int}(\mathfrak{A} + i\mathfrak{B}), \\ 2\pi \int_0^{R-r} \dot{\mathfrak{H}}_{y\,(y=0)}\, \varrho'\, d\varrho' = in \cdot J e^{int}(\mathfrak{C} + i\mathfrak{D}), \end{cases}$$

so kommt nach (76), wenn $\Re$ den reellen Teil bedeutet:

$$\Re(E) = (\mathfrak{A} - n\,\mathfrak{D})\,J\cos nt - (\mathfrak{B} + n\,\mathfrak{C})\,J\sin nt,$$

d. h. man erhält für Widerstand und Selbstinduktion die folgenden Werte:

$$(77) \qquad w = \mathfrak{A} - n\,\mathfrak{D}, \quad L = \frac{\mathfrak{B}}{n} + \mathfrak{C}.$$

Es ist nun zu zeigen, daß diese neuen Ausdrücke mit den früheren übereinstimmen. Wir wollen hier die vollständige Überführung in die frühere Form nur für L durchführen; beim Widerstand werden wir uns damit begnügen, die Identität der ersten Entwickelungskoeffizienten von (77) und (48) zu zeigen.

Wir beginnen mit der Selbstinduktion und haben also vorerst $\mathfrak{C}$ noch weiter umzuformen. Hierzu ist es nötig, auf die in den beiden vorangehenden Paragraphen durchgeführte Berechnung der magnetischen Energie zurückzugreifen. Verlegt man nämlich den Verzweigungsschnitt, von dem p. 37 die Rede war, entsprechend Fig. 3a in das Innere der Spule, so findet man, daß jetzt die Integrale $W_a^{(2)}$ und $W_a^{(3)}$ verschwinden, da wegen der Herübernahme der Konstanten (const.) auf die erste Beziehung von (15) bzw. (60) $\mathfrak{B}$ an den betreffenden Flächen verschwindet. Das Integral (57) ist nunmehr zwischen den Grenzen 0 und 2π zu nehmen, so daß statt (59):

$$(78) \qquad M[W_i + W_a^{(1)}] = \frac{\mu\pi}{h} J^2 \cdot \sum_0^\infty{}^{(\nu)}\, \Re\left\{c_\nu \frac{\mathfrak{F}_\nu(kr)}{k\,\mathfrak{F}_\nu'(kr)}\right\}$$

kommt. Die eckige Klammer bedeutet, daß der Ausdruck zu der neuen Berechnungsweise der magnetischen Energie gehört.

Das Integral über den neuen Verzweigungsschnitt (vgl. Fig. 3a) lautet jetzt analog wie in (68):

$$M[W_a^{(4)}] = \frac{2\pi^2 J^2}{h} \int_0^{R-r} \Re \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)_{y=0} \varrho' \, d\varrho',$$

d. h. nach (75″) mit Rücksicht auf (6):

$$= \frac{\pi^2 R^2 J^2}{h} + \pi R J^2 \sum_1^\infty{}^{(s)} \Re(\alpha_s) e^{-v s} \tag{79}$$

wenn noch r gegen R vernachlässigt wird. Setzt man den aus Addition von (78) und (79) erhaltenen Wert für die magnetische Gesamtenergie unseres Raumausschnittes gleich dem früheren Ausdruck (§ 5), so entsteht eine Beziehung zwischen der in (75″) bzw. in (76′) (𝔈) auftretenden Summe über die α_s und der in (71) eingehenden Summe (69) über die β_s. Nimmt man dann noch an $\mathfrak{B}$ ((76′) und (2)) eine kleine Umrechnung vor, so erhält man aus (77) den gleichen Ausdruck wie (71).

Interessant ist es, nun auch die Identität der so grundverschieden aussehenden Ausdrücke (48) und (77) für den Widerstand nachzuweisen. Wir entwickeln, wie erwähnt, zu diesem Zweck w beide Male nach Potenzen von v und vergleichen deren Koeffizienten. Setzt man:

$$w = a_0 + a_1 v + a_2 v^2 + \ldots,$$

so ist ersichtlich nach (48) und (5):

$$a_0 = -\frac{R}{\sigma \cdot r} \Re \left\{ \frac{k J_0(k r)}{J_0'(k r)} \right\}, \quad a_1 = 0. \tag{80}$$

Wir wollen hier nur diese beiden ersten Koeffizienten betrachten.

Um die Entwickelung von (77) besser überblicken zu können, erinnern wir an die Bedeutung der α_s (16) und (25), woraus sich ergibt:

$$\Im \mathfrak{m}(\alpha_s) = \tfrac{1}{2} \sum_1^\infty{}^{(\nu)} \frac{v^{\nu+1}}{\nu!} \cdot s^{\nu-1} \cdot \Im \mathfrak{m}\{c_\nu (1 - \lambda_\nu)\}. \tag{81}$$

Die c_ν sind nach (39) und (43) alle mit v proportional außer c_1, wofür man aus (42) erhält:

$$c_1 = \frac{1}{1 + \lambda_1} + \frac{v^2}{1 + \lambda_1} \sum_0^\infty{}^{(p)} A_p^{(1)} \cdot v^{2p}. \tag{82}$$

Außerdem ist:

$$\sum_{1}^{\infty}{}^{(s)}\, e^{-v\,s} = \frac{1}{v} + \text{pos. Potenzen},$$

und ähnlich:

$$\sum_{1}^{\infty}{}^{(s)}\, s^{\nu-1}\cdot e^{-v\,s} = \frac{(\nu-1)!}{v^{\nu}} + \text{pos. Potenzen.}$$

Setzt man nun (81) in den aus (75″) und (76′) folgenden Ausdruck für $\mathfrak{D}$ ein, so können wir, da es uns nur auf den Koeffizienten von v ankommt, vermöge der eben angegebenen Entwickelungen der Summen über s auch schreiben:

$$n\,\mathfrak{D} = 2\,\pi\,R\,n\cdot\boldsymbol{v}\cdot\sum_{1}^{\infty}{}^{(\nu)}\,\frac{1}{\nu}\,\Im\,\mathfrak{m}\,\{c_{\nu}(1-\lambda_{\nu})\}$$

$$+ \text{ Potenzen höher als } v.$$

Wegen (82) lautet daher die Entwicklung von $n\,\mathfrak{D}$:

$$(83)\qquad n\,\mathfrak{D} = 2\,\pi\,R\,n\cdot v\cdot\Im\,\mathfrak{m}\left(\frac{1-\lambda_1}{1+\lambda_1}\right) + \text{höh. Potenzen.}$$

Die nach (77) noch anzugebende Entwicklung von $\mathfrak{A}$ lautet nach einer kleinen Zwischenrechnung:

$$(84)\qquad \left\{\begin{array}{l} \mathfrak{A} = -\,\dfrac{R}{r\cdot\sigma}\,\Re\left\{\dfrac{k\,J_0(k\,r)}{J_0'(k\,r)}\right\} - 4\,\pi\,R\cdot n\cdot v\,\Im\,\mathfrak{m}\left(\dfrac{\lambda_1}{1+\lambda_1}\right) \\ \qquad\qquad + \text{höhere Potenzen von } v. \end{array}\right.$$

Wie man aus Vergleich von (80) mit der aus (83) und (84) gemäß (77) zu bildenden Entwickelung von w ersieht, stimmt das konstante Glied beider Reihen überein. Ferner kommt als Koeffizient von v:

$$-\,2\,\pi\,R\cdot n\cdot\Im\,\mathfrak{m}\left\{\frac{1-\lambda_1}{1+\lambda_1}+\frac{2\,\lambda_1}{1+\lambda_1}\right\},$$

d. h. der Koeffizient verschwindet wegen $\{\} = 1$, wie es nach (80) verlangt werden muß.

Man wird hiernach von der allgemeinen Übereinstimmung der Ausdrücke (48) und (77) überzeugt sein. Ich habe mir übrigens den Beweis der Identität noch für das nächste Entwicklungsglied durchgeführt.

Zweites Kapitel.

Das elektrische Problem.

Wir gehen in den folgenden beiden Paragraphen direkt auf die Berechnung des elektrischen Potentialfelds aus, dessen Randwerte wir aus § 6 übernehmen. Die Betrachtung des zweiten Bestandteiles in dem Ansatz (72) für das elektrische Kraftfeld d. h. des Wirbelfeldes $\mathfrak{R}$ wollen wir bis zum Schluß des § 10 zurückstellen.

Wie in der Einleitung erwähnt, kann man auch im Falle des elektrischen Potentials von dem sogenannten ebenen Problem ausgehen, d. h. man setzt den Spulenradius als unendlich groß an und betrachtet demnach statt des spiralig aufgewundenen Drahtes eine unendliche Folge übereinander angeordneter paralleler Drähte (vgl. Fig. 1). Das Potential soll auf der einen Seite im Unendlichen verschwinden und an der Oberfläche der Drähte bestimmte und von Draht zu Draht, in der in der Einleitung beschriebenen Weise, um den gleichen Betrag zunehmende Werte haben. Die hieraus gewonnenen Koeffizienten des elektrischen Potentials gelten, wie wir sehen werden, in guter Näherung auch im Falle des endlichen Spulenradius, wenn das Verhältnis Spulenradius : Ganghöhe groß ist gegen 1.

Bei der Aufstellung des elektrischen Potentials verfahren wir in derselben Weise wie früher, indem wir es auf Maxwellsche Art aus den Feldern einzelner Pole, Dipole usf. aufbauen, die wir auch hier wieder zu Gitterlösungen zusammenfassen können. Doch entbehrt diese Konstruktion der durchsichtigen Einfachheit, die sich beim magnetischen Problem ergab, und es empfiehlt sich deshalb, die Potentialfunktion vorerst nur so weit aufzustellen, als zur Erfüllung der Grenzbedingungen erster Art erforderlich ist. Grenzbedingungen erster Art wollen wir dabei die Bedingung nennen, daß das Potential an entsprechenden Stellen zweier beliebiger aufeinanderfolgende Drähte überall dieselbe Differenz besitzen soll, nämlich E = der pro Windung wirkenden elektromotorischen Kraft (§ 6). Als Grenzbedingungen zweiter Art ist dann die andere Bedingung zu bezeichnen, daß das Potential auf

der ganzen Oberfläche des nullten Drahtes verschwinden soll. Das Verschwinden im Unendlichen ist dabei stets festzuhalten.

Nehmen wir nun an, wir hätten die Grenzbedingungen erster Art erfüllt, so muß offenbar dieselbe Korrektion, die vermöge der Grenzbedingungen zweiter Art am nullten Draht anzubringen ist, auch an allen übrigen Drähten vorzunehmen sein; andernfalls wäre eben die Differenz der Potentialwerte an je zwei aufeinanderfolgenden Drähten nicht mehr überall dieselbe. Daraus erhellt, daß die Grenzbedingungen zweiter Art durch einen periodischen Ansatz erfüllbar sind, d. h. durch eine Funktion, die sich nicht ändert, wenn man y um ein Vielfaches von h vermehrt (vgl. Fig. 1). Da es bei den Grenzbedingungen erster Art nur auf die *Differenz* der Potentialwerte ankommt und hierbei jede periodische Funktion herausfällt, so ersieht man, daß die Bedingungen erster Art unabhängig von denjenigen zweiter Art durch einen unperiodischen Ansatz (vgl. § 7) erfüllbar sind. Wir werden dementsprechend vorerst nur die später allein in Frage kommenden Grenzbedingungen erster Art behandeln und den so gewonnenen Ansatz dann durch einen periodischen Ausdruck ergänzen. Es wird sich übrigens zeigen, daß diese Ergänzung nur die Werte gewisser Koeffizienten des unperiodischen Ansatzes, nicht aber dessen allgemeine Form verändert; (man hat also in dem im folgenden Paragraphen zu behandelnden Ansatz schon die allgemeine Form des elektrischen Potentials vor sich) hieraus rechtfertigt sich die Überschrift des folgenden Paragraphen.

§ 7. Allgemeiner Ansatz für das elektrische Potential.

Um dem Anwachsen bzw. Abfallen der Randwerte des Potentials nach der einen oder anderen Richtung unserer unendlichen Folge von parallelen Drähten Rechnung zu tragen, geben wir den Dipolen, die wir im Mittelpunkt des m^{ten} Drahtes anbringen, das m-fache Gewicht der entsprechenden, zum ersten Draht gehörigen Dipole. Wir gelangen so zu neuen Gitterfunktionen, die sich von den früheren wesentlich unterscheiden; wir wollen sie modifizierte Gitterlösungen nennen

und mit Γ_ν bezeichnen. Die nullte modifizierte Gitterlösung hat demnach die Gestalt:

$$\Gamma_0 = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{(m)}\, m \,.\, \log\left(\frac{iz}{mh} + 1\right),$$

wenn $z = x + iy$. Der Apostroph an dem Summenzeichen bedeutet hier wie auch bei den später auftretenden Summen, daß das nullte Glied auszulassen ist. In der vorstehenden Form konvergiert unsere Summe für Γ_0 jedoch noch nicht, wie man leicht einsieht, wenn man den Grenzwert des allgemeinen Gliedes für $m = \pm\infty$ bildet:

$$\lim_{m=\pm\infty}\left\{m \log\left(\frac{iz}{mh} + 1\right)\right\} = \frac{iz}{h};$$

wir werden also schreiben:

$$\Gamma_0 = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{(m)}\, m \left\{\log\left(\frac{iz}{mh} + 1\right) - \frac{iz}{mh}\right\}. \tag{85}$$

Zur Konvergenz ist jetzt nur noch erforderlich, daß man je zwei zu $m = 0$ symmetrisch gelegenen Glieder zusammenfaßt.

Die ν^{te} modifizierte Gitterlösung Γ_ν wird aus der vorstehenden in der gleichen Weise wie früher durch Differentiation abgeleitet:

$$\Gamma_\nu = \frac{(-1)^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\frac{d^\nu}{dz^\nu}\Gamma_0, \tag{86}$$

so daß die allgemeine Gestalt dieser Funktionen die folgende wird:

$$\Gamma_\nu = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{(m)} \frac{m}{(z - imh)^\nu}; \tag{87}$$

mit Ausnahme der ersten, welche lautet:

$$\Gamma_1 = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}'_{(m)} \left\{\frac{m}{z - imh} - \frac{i}{h}\right\}. \tag{88}$$

Während wir früher bei allen Umformungen von der in Reihenform bequem darstellbaren nullten Funktion (G_0) ausgingen,

ist es hier vorteilhafter, Γ_1 zum Ausgangspunkt zu nehmen; denn in (88) läßt sich das allgemeine Glied so umformen:

$$\frac{m}{x - imh} - \frac{i}{h} = -\frac{ix}{h} \cdot \frac{1}{x - imh},$$

d. h.

$$\Gamma_1 = -\frac{ix}{h} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \frac{1}{x - imh}.$$

Die hier übrig bleibende Summe ist im wesentlichen die von früher her bekannte Funktion G_1, und man gelangt zu der einfachen Beziehung:

$$\Gamma_1 = -\frac{ix}{h} G_1. \tag{89}$$

Die Konstante, die auf der rechten Seite von (89) wegen des in G_1 mitgerechneten, in Γ_1 fortzulassenden Gliedes $m = 0$ noch hinzutreten müßte, ist weggelassen, weil die Γ_ν in ihrem Verhalten nicht wesentlich geändert werden, wenn zu den betreffenden Summen überall noch eine ganze rationale Funktion von z hinzugefügt wird. Diese Zusatzfunktion ist so zu bestimmen, daß die Γ_ν alle für $x = -\infty$ verschwinden; wie man sieht, ist dies in (89) erfüllt. Die hieraus durch Differentiation abgeleiteten höheren Gitterfunktionen genügen daher ebenfalls der Bedingung im Unendlichen. Nach (86) hat man:

$$\Gamma_\nu = \frac{(-1)^{\nu-1}}{(\nu-1)!} \frac{d^{\nu-1}}{dz^{\nu-1}} \Gamma_1,$$

d. h. wegen (89) und (11):

$$\Gamma_\nu = \frac{i}{h} G_{\nu-1} - \frac{iz}{h} G_\nu. \tag{90}$$

Wir haben damit alle Γ_ν für $\nu > 1$ und in (89) auch für $\nu = 1$ auf die G_ν zurückgeführt. Für Γ_0 erhält man aus (89) mit Rücksicht auf (11) und (86):

$$\frac{d\Gamma_0}{dz} = -\frac{i}{h} \frac{d}{dz}(z G_0) + \frac{i}{h} G_0,$$

d. h.

$$\Gamma_0 = -\frac{ix}{h} G_0 + \frac{i}{h} \int_0^z G_0 \, dz.$$

Die Integration ist hierin von 0 bis z erstreckt, damit Γ_0 für $z = 0$ verschwindet. Indem wir für G_0 die Darstellung (12) einsetzen, erhalten wir die folgende Reihenentwickelung:

$$(91)\quad \begin{cases} x>0 \quad \Gamma_0 = -\pi i \frac{z^2}{h^2} + \frac{iz}{h} \sum_1^\infty{}^{(s)} \frac{1}{s} e^{-2\pi s \frac{z}{h}}, \\ \qquad\qquad - i \frac{\pi}{12} + \frac{i}{2\pi} \sum_1^\infty{}^{(s)} \frac{1}{s^2} e^{-2\pi s \frac{z}{h}}, \\ x<0 \quad \Gamma_0 = \text{Const.} + \frac{iz}{h} \sum_1^\infty{}^{(s)} \frac{1}{s} e^{+2\pi s \frac{z}{h}}, \\ \qquad\qquad + \frac{i\pi}{12} - \frac{i}{2\pi} \sum_1^\infty{}^{(s)} \frac{1}{s^2} e^{+2\pi s \frac{z}{h}}. \end{cases}$$

Die in der letzten Gleichung auftretende Konstante rührt in bekannter Weise von der Integration über die Fourrierreihen (12) her und ist so zu bestimmen, daß die beiden vorstehenden Ausdrücke längs der y-Achse stetig ineinander übergehen. Eine einfache Rechnung zeigt, daß man für das Intervall $mh < y < (m+1)h$ zu setzen hat:

$$\text{Const.} = +\pi i m(m+1).$$

Dagegen fällt die in dem zweiten Ausdruck (12) auftretende Konstante, wie man leicht einsieht, bei der Integration heraus. Außerdem zeigt sich, daß die in (91) enthaltene Entwickelung auch die Bedingung im Unendlichen des Außenraumes ($x = -\infty$, vgl. Fig. 1) erfüllt; hier wird Γ_0 gleich einer imaginären Konstanten, der reelle Teil von Γ_0, auf den es uns allein ankommt, also Null.

Für die höheren Gitterlösungen ($\nu > 1$) folgt aus (90) und (13):

$$(92)\quad \begin{cases} x>0 \quad \Gamma_\nu = -\frac{1}{(\nu-1)!} \left(\frac{2\pi}{h}\right)^\nu \cdot \frac{iz}{h} \sum_1^\infty{}^{(s)} s^{\nu-1} \cdot e^{-2\pi s \frac{z}{h}}, \\ \qquad\qquad + \frac{1}{(\nu-2)!} \left(\frac{2\pi}{h}\right)^\nu \cdot \frac{i}{2\pi} \sum_1^\infty{}^{(s)} s^{\nu-2} \cdot e^{-2\pi s \frac{z}{h}}, \\ x<0 \quad \Gamma_\nu = -\frac{(-1)^\nu}{(\nu-1)!} \left(\frac{2\pi}{h}\right)^\nu \cdot \frac{iz}{h} \cdot \sum_1^\infty{}^{(s)} s^{\nu-1} \cdot e^{+2\pi s \frac{z}{h}}, \\ \qquad\qquad - \frac{(-1)^\nu}{(\nu-2)!} \left(\frac{2\pi}{h}\right)^\nu \cdot \frac{i}{2\pi} \sum_1^\infty{}^{(s)} s^{\nu-2} \cdot e^{+2\pi s \frac{z}{h}}, \end{cases}$$

und für $\nu = 1$ aus (89):

$$(93)\quad \begin{cases} x > 0 \quad \Gamma_1 = -\dfrac{2\pi i z}{h^2} - \dfrac{2\pi i z}{h^2} \sum_1^\infty {}^{(s)} e^{-2\pi s \frac{z}{h}}, \\ x < 0 \quad \Gamma_1 = \dfrac{2\pi i z}{h^2} \sum_1^\infty {}^{(s)} e^{-2\pi s \frac{z}{h}}. \end{cases}$$

Wir setzen jetzt wieder in Analogie zu (14) als allgemeine Lösung an:

$$(94)\qquad U = \sum_0^\infty {}^{(\nu)} a_\nu \Re(\Gamma_\nu),$$

wobei die a_ν nicht mit den früher so bezeichneten Entwickelungskoeffizienten übereinzustimmen brauchen. Der reelle Teil der Γ_ν ist zu nehmen, damit man entsprechend der Symmetrie der Stromverteilung um den Mittelpunkt des m^{ten} Drahtquerschnittes herum eine in ϑ (vgl. Fig. 1) cosförmige Verteilung des Potentials hat, die das m-fache Gewicht derjenigen um den Mittelpunkt des ersten Drahtquerschnittes besitzt.

Schreibt man die Γ_ν in Reihenform, so erhält man aus (94) den folgenden recht komplizierten Ansatz, der jedoch in unseren folgenden Betrachtungen nur eine ganz untergeordnete Rolle spielt:

$$(95)\quad \begin{cases} x > 0 \quad U = \dfrac{2\pi x y}{h^2} a_0 + \dfrac{2\pi y}{h^2} a_1 \\ \qquad\qquad + \dfrac{y}{h} \sum_1^\infty {}^{(s)} \alpha_s \cos 2\pi s \dfrac{y}{h} e^{-2\pi s \frac{x}{h}}, \\ \qquad - \dfrac{x}{h} \sum_1^\infty {}^{(s)} \alpha_s \sin 2\pi s \dfrac{y}{h} e^{-2\pi s \frac{x}{h}} \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{2\pi} \sum_1^\infty {}^{(s)} \gamma_s \sin 2\pi s \dfrac{y}{h} e^{-2\pi s \frac{x}{h}}, \\ x < 0 \quad U = \dfrac{y}{h} \sum_1^\infty {}^{(s)} \beta_s \cos 2\pi s \dfrac{y}{h} e^{+2\pi s \frac{x}{h}} \\ \qquad\qquad + \dfrac{x}{h} \sum_1^\infty {}^{(s)} \beta_s \sin 2\pi s \dfrac{y}{h} e^{+2\pi s \frac{x}{h}}, \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{2\pi} \sum_1^\infty {}^{(s)} \delta_s \sin 2\pi s \dfrac{y}{h} e^{+2\pi s \frac{x}{h}}. \end{cases}$$

Hierin bedeutet:

$$(96)\qquad \begin{cases} \alpha_s = -\frac{a_0}{s} + \sum_1^\infty{}^{(\nu)} \frac{a_\nu}{(\nu-1)!}\left(\frac{2\pi}{h}\right)^\nu s^{\nu-1}, \\ \beta_s = -\frac{a_0}{s} + \sum_1^\infty{}^{(\nu)} (-1)^\nu \frac{a_\nu}{(\nu-1)!}\left(\frac{2\pi}{h}\right)^\nu s^{\nu-1}, \\ \gamma_s = \frac{\alpha_s}{s} + 2\frac{a_0}{s^2} - \frac{2\pi}{h}\cdot\frac{a_1}{s}, \\ \delta_s = \frac{\beta_s}{s} + 2\frac{a_0}{s^2} + \frac{2\pi}{h}\cdot\frac{a_1}{s}, \end{cases}$$

wie man aus (95) in Verbindung mit (91) bis (93) unschwer ablesen kann.

§ 8. Die Grenzbedingungen erster Art.

Für unsere gegenwärtigen Zwecke ist es vorteilhaft, ein neues elektrisches Potential $\mathfrak{U}$ zu definieren, das sich von dem früheren (vgl. (94)) um einen passend gewählten Faktor unterscheidet:

$$(95')\qquad \mathfrak{U} = E_0\, e^{i(nt-\delta)}.U, \quad E_0\, e^{i(nt-\delta)} = E,$$

wobei, wie öfters erwähnt, E die pro Windung wirkende elektromotorische Kraft darstellt.

Zur Aufstellung der Randbedingungen betrachten wir vorübergehend die Verhältnisse an einer spiralig aufgewundenen Spule. An einer solchen ist die Zunahme des an der Drahtoberfläche genommenen Potentials offenbar stetig und pro Windung gleich dem in (73) berechneten Wert $\mathfrak{U}_2 - \mathfrak{U}_1 = E$. Wir erinnern hierbei an das in (76) erhaltene Resultat, wonach E auf der ganzen Peripherie des Drahtquerschnittes denselben Wert hat. Wenn wir nun von der spiralig aufgewundenen Spule zu unserer in einzelne Drähte bzw. Ringe aufgelösten übergehen, haben wir den stetigen Anstieg des Potentials derart in einen sprunghaften zu verwandeln, daß die Differenz zwischen den auf zwei benachbarten Ringen bzw. Drähten herrschenden Potentialwerten gleich E wird und das Potential auf dem einzelnen Ring bzw. Draht überall den gleichen Wert besitzt. Wir erteilen also den Drähten die

Potentialwerte $\ldots -2E, \; -E, \; 0, \; +E, \; +2E, \ldots$ Nennen wir die Differenz der Potentialwerte von $\mathfrak{U}$ an irgend zwei um h in der y-Richtung (vgl. Fig. 1) voneinander entfernten Punkten $\Delta\mathfrak{U}$, so muß also sein, falls diese Punkte speziell auf der Drahtoberfläche liegen:

$$\Delta\mathfrak{U}_{(\varrho=r)} = E.$$

Dies ist die allgemeine Form der Grenzbedingungen erster Art; wegen (95′) können wir hierfür auch schreiben:

$$\Delta U_{(\varrho=r)} = 1. \tag{97}$$

Darin hat also ΔU die Bedeutung:

$$\Delta U = \sum_{0}^{\infty}{}^{(\nu)} a_\nu \, \Re\{\Gamma_\nu(z+ih) - \Gamma_\nu(z)\},$$

da einer Vermehrung von y um h eine solche von z um ih entspricht. Die in der $\{\}$ Klammer stehende Differenz ist nach (89), (90) und (91) gleich G_ν, und es kommt:

$$\Delta U = \sum_{0}^{\infty}{}^{(\nu)} a_\nu \, \Re(G_\nu), \tag{97′}$$

ein mit (17) formal übereinstimmender Ausdruck.

Eine solche Funktion, die also entsprechend (97) auf der Drahtoberfläche konstante Werte besitzt, ist aber nach dem Früheren schon bekannt; wir brauchen nur an die am Ende des § 3 gegebene Abbildungsaufgabe zu erinnern. Dort war gezeigt, daß der reelle Teil von W (45) auf dem Draht den konstanten Wert:

$$r\,\Phi = \frac{h}{2\pi}\,\Re(G_0)_{\varrho=r} - \sum_{1}^{\infty}{}^{(\nu)} r^{\nu+1} \cdot \frac{c_\nu(k=\infty)}{2\nu}\,\Re(G_\nu)_{\varrho=r} \tag{98}$$

annimmt. Wir haben also zu setzen:

$$a_0 = \frac{1}{v\,\Phi}, \quad a_\nu = -\,r^\nu \cdot \frac{c_\nu(k=\infty)}{2\nu} \cdot \frac{1}{\Phi}. \tag{99}$$

Hiermit ist das elektrische Problem im wesentlichen gelöst; es bleibt noch übrig, der Konstanten Φ eine für die numerische Rechnung geeignete Gestalt zu geben.

Da in (45) der reelle Teil von W auf der ganzen Drahtoberfläche denselben Wert Φ hat, so können wir zu dessen

Bestimmung einen uns bequemen Punkt $x = \pm r$, $y = 0$ wählen. Hierfür ist, wenn $\nu \geqq 2$:

$$G_\nu = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{(m)} \frac{1}{(\pm r - i m h)^\nu} = \frac{S_\nu}{(\pm r)^\nu},$$

wobei S_ν die Bedeutung (70‴) hat; ferner folgt aus (8) und (11), wenn abkürzend $2\pi r/h = v$ gesetzt wird:

$$G_0 = \log(e^{\pm v} - 1), \quad G_1 = \frac{2\pi}{h} \cdot \frac{1}{1 - e^{\mp v}}.$$

Bildet man auf diese Weise aus (98) $\Phi(-r)$ und $\Phi(+r)$, so kommt durch Addition beider Werte:

$$(100) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi = \frac{1}{2} + \frac{1}{v} \log(1 - e^{-v}) - \frac{v}{2} c_1 (k = \infty) \\ - \frac{1}{4} \sum_1^\infty{}^{(\nu)} \frac{c_{2\nu}(k=\infty)}{2\nu} S_{2\nu}. \end{aligned} \right.$$

Im numerischen Teil wird Φ als Funktion von v zahlenmäßig angegeben und der Verlauf dieser Funktion durch eine Kurve veranschaulicht. Wir können aber jetzt schon ohne weitläufige Rechnung die beiden Endpunkte und den mutmaßlichen Verlauf derselben angeben.

Für $v = 0$ wird $c_1 = 1/2$ und die übrigen c_ν verschwinden; man sieht also, daß hierfür $\Phi = -\infty$ wird. Im entgegengesetzten Fall dicht aneinanderliegender Windungen ist W (45) im Außenraum ($x < 0$) überall gleich Null, da dann das Äußere der Spule feldfrei abgeschirmt ist[1]); daraus folgt aber

$$\Phi(v = \pi) = 0.$$

Da wir demnach annehmen dürfen, daß Φ für $v < \pi$ ganz im Negativen verläuft und nirgends verschwindet, so versagt unsere Lösung nur in dem praktisch bedeutungslosen Fall vollkommen dichter Wickelung.

§ 9. Ergänzung des Potentials.

Wir wollen das bisher aufgestellte Potential in diesem Paragraphen in doppelter Hinsicht ergänzen. Denn neben der durch die Grenzbedingungen zweiter Art geforderten Ergänzung

1) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 24. p. 623 ff. 1907.

durch einen periodischen Ansatz (unter 1. ausgeführt) bleibt noch die Aufgabe übrig, unser ebenes Potential ähnlich wie früher auf das entsprechende räumliche umzurechnen (unter 2. angedeutet). Wir bringen diese Umrechnung, um zu zeigen, daß unsere bisherigen Koeffizienten tatsächlich in guter Näherung auch im Falle eines endlichen Spulenradius gelten, wenn nur das Verhältnis Spulenradius : Ganghöhe eine große Zahl ist; im übrigen werden wir im folgenden keinen Gebrauch von den Formeln für das räumliche Problem zu machen haben.

1. Auch die Ergänzungsfunktion gemäß den Grenzbedingungen zweiter Art kommt für uns späterhin gar nicht in Betracht; trotzdem wollen wir sie der Vollständigkeit halber behandeln. Wir haben zu dem Potential (95) eine solche in y periodische Funktion hinzuzufügen, daß das Gesamtpotential auf dem nullten Draht verschwindet. Wie man sieht, muß das Zusatzpotential eine in y ungerade Funktion sein etwa von der Gestalt des Potentials (15). Es wäre also zu verlangen, daß auf dem nullten Draht (vgl. (95) und (13)):

$$\sum_{0}^{\infty}{}^{(\nu)}\, a_\nu \,\Re\,(\Gamma_\nu) + \sum_{0}^{\infty}{}^{(\nu)}\, b_\nu \,\Im\,\mathfrak{m}\,(G_\nu) = 0. \tag{101}$$

Der hier hinzugefügte Ansatz (15) bzw. (14) ist aber erstens nicht periodisch und zweitens, wie bekannt, längs der negativen x-Achse unstetig; beide Bedingungen, die der Periodizität und der Stetigkeit, sind aber erfüllt, wenn wir $b_0 = 0$ setzen. Wir können bei der Bestimmung der übrigen b_ν nun genau so verfahren wie früher bei der Bestimmung der c_ν. Wir führen eine Hilfsfunktion

$$\sum_{1}^{\infty}{}^{(\nu)}\, b_\nu \,\Re\,(G_\nu) = \sum_{0}^{\infty}{}^{(m)}\, p_m \cos m\,\vartheta \tag{102}$$

ein; dann ist einerseits:

$$\pi\, p_m = \sum_{1}^{\infty}{}^{(\nu)}\, b_\nu \int_0^{2\pi} \Re\,(G_\nu)\cos m\,\vartheta\, d\vartheta\,,$$

und andererseits durch Zusammenfassung von (101) und (102) mittels (23):

$$\pi\, p_m + \sum_{0}^{\infty}{}^{(\nu)}\, a_\nu \int_0^{2\pi} \Re\,(\Gamma_\nu)\cos m\,\vartheta\, d\vartheta = 2\,\pi\,\frac{b_m}{r^m}\,.$$

Die beiden letzten Gleichungen gestatten die Elimination der p_m und damit die Aufstellung einer Beziehung zwischen einem einzelnen der Koeffizienten b_ν und allen übrigen; daraus läßt sich dann ebenso wie früher eine Reihenentwickelung für die b_ν gewinnen.

Wir verfolgen diese Rechnungen jedoch nicht weiter, weil sie für die Berechnung der Kapazität nicht in Betracht kommen (vgl. p. 67). Es genügt, wenn wir zusehen, welche Veränderungen durch ein solches Zusatzpotential in unserem Ansatz (95) verursacht würden. Eine Funktion

$$\sum_1^\infty{}^{(\nu)}\, b_\nu\, \mathfrak{Im}\,(G_\nu)$$

hat nach (13) in Reihenform die Gestalt:

$$x > 0 \qquad \sum_1^\infty{}^{(s)}\, \xi_s \sin 2\pi s \frac{y}{h}\, e^{-2\pi s \frac{x}{h}},$$

$$x < 0 \qquad \sum_1^\infty{}^{(s)}\, \eta_s \sin 2\pi s \frac{y}{h}\, e^{+2\pi s \frac{x}{h}}.$$

In (95) werden also nur die γ_s und δ_s verändert, zu denen bzw. die ξ_s und η_s hinzuzufügen sind.

2. Bei der Umrechnung von (15) in (60) sahen wir, daß die Exponentialfunktionen durch die Zylinderfunktionen vom Index 0 und entsprechendem Argument zu ersetzen waren. Dies trifft zweifellos auch auf die Reihendarstellung von (97′) zu und man hat infolgedessen, wenn man auf (95) zurückgeht, im Falle $x<0$, d. h. $\varrho' > R$ zunächst anzusetzen:

$$U = \frac{y}{h} \sum_1^\infty{}^{(s)} \beta_s \cos 2\pi s \frac{y}{h} \cdot \frac{H_0^{(1)}\left(2\pi i s \frac{\varrho'}{h}\right)}{H_0^{(1)}\left(2\pi i s \frac{R}{h}\right)}$$

$$+ \sum_1^\infty{}^{(s)}\, \beta_s \sin 2\pi s \frac{y}{h} \cdot \varphi_s(\varrho')$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sum_1^\infty{}^{(s)}\, \delta_s \sin 2\pi s \frac{y}{h} \cdot \frac{H_0^{(1)}\left(2\pi i s \frac{\varrho'}{h}\right)}{H_0^{(1)}\left(2\pi i s \frac{R}{h}\right)}.$$

Die Funktion $\varphi_s(\varrho')$ ist dann offenbar so zu bestimmen, daß:

$$U_s = \frac{y}{h} \cos 2\pi s \frac{y}{h} \cdot \frac{H_0^{(1)}\left(2\pi i s \frac{\varrho'}{h}\right)}{H_0^{(1)}\left(2\pi i s \frac{R}{h}\right)} + \sin 2\pi s \frac{y}{h} \cdot \varphi_s(\varrho')$$

der Potentialgleichung $\Delta U_s = 0$ in Zylinderkoordinaten ϱ', y genügt; d. h. es muß sein:

$$(103) \quad \begin{cases} \varphi_s''(\varrho') + \frac{1}{\varrho'} \varphi_s'(\varrho') - \left(\frac{2\pi s}{h}\right)^2 \cdot \varphi_s(\varrho') \\ \qquad = \frac{4\pi s}{h^2} \frac{H_0^{(1)}\left(2\pi i s \frac{\varrho'}{h}\right)}{H_0^{(1)}\left(2\pi i s \frac{R}{h}\right)}. \end{cases}$$

Im Falle $x > 0$, d. h. $\varrho' < R$ würde sich Ähnliches ergeben, nur daß an Stelle der Hankelschen die Besselsche Funktion J stehen würde. Wir betrachten deshalb die allgemeinere Gleichung:

$$f'' + \frac{1}{x} f' + f = a\, C_0(x),$$

worin a eine beliebige Konstante und C_0 eine Zylinderfunktion vom Index 0 bedeutet. Eine praktische Lösung dieser Gleichung ist, wie man durch Einsetzen und mit Rücksicht auf die Rekursionsformel (64) erkennt:

$$f = + \frac{a}{2} x \,.\, C_0'(x).$$

Man erhält so nach einer kleinen Zwischenrechnung aus (103):

$$\varphi_s(\varrho') = i \frac{\varrho'}{h} \cdot \frac{H_0^{(1)\prime}\left(2\pi i s \frac{\varrho'}{h}\right)}{H_0^{(1)}\left(2\pi i s \frac{R}{h}\right)}.$$

Für $\varrho' < R$ treten wieder die Besselschen Funktionen J statt H ein und man hat das Vorzeichen von φ_s umzukehren; da außerdem statt $x\,.\,y$ zu schreiben ist $- R\,.\,y\,.\log(\varrho'/R)$, so kommt insgesamt aus (95):

$$
(104)\quad
\begin{cases}
\varrho' < R \quad U = -\dfrac{2\pi R}{h} a_0 y \log\dfrac{\varrho'}{R} + \dfrac{2\pi y}{h} a_1 \\
\qquad + \dfrac{y}{h} \sum_1^\infty{}^{(s)} \alpha_s \cos 2\pi s \dfrac{y}{h} \dfrac{J_0\left(2\pi i s \dfrac{\varrho'}{h}\right)}{J_0\left(2\pi i s \dfrac{R}{h}\right)} \\
\qquad - \dfrac{i\varrho'}{h} \sum_1^\infty{}^{(s)} \alpha_s \sin 2\pi s \dfrac{y}{h} \cdot \dfrac{J_0'\left(2\pi i s \dfrac{\varrho'}{h}\right)}{J_0\left(2\pi i s \dfrac{R}{h}\right)} \\
\qquad + \dfrac{1}{2\pi} \sum_1^\infty{}^{(s)} \gamma_s \sin 2\pi s \dfrac{y}{h} \cdot \dfrac{J_0\left(2\pi i s \dfrac{\varrho'}{h}\right)}{J_0\left(2\pi i s \dfrac{R}{h}\right)} \\
\varrho' > R \quad U = \dfrac{y}{h} \sum_1^\infty{}^{(s)} \beta_s \cos 2\pi s \dfrac{y}{h} \dfrac{H_0^{(1)}\left(2\pi i s \dfrac{\varrho'}{h}\right)}{H_0^{(1)}\left(2\pi i s \dfrac{R}{h}\right)} \\
\qquad + \dfrac{i\varrho'}{h} \sum_1^\infty{}^{(s)} \beta_s \sin 2\pi s \dfrac{y}{h} \cdot \dfrac{H_1^{(1)'}\left(2\pi i s \dfrac{\varrho'}{h}\right)}{H_0^{(1)}\left(2\pi i s \dfrac{R}{h}\right)} \\
\qquad + \dfrac{1}{2\pi} \sum_1^\infty{}^{(s)} \delta_s \sin 2\pi s \dfrac{y}{h} \cdot \dfrac{H_0^{(1)}\left(2\pi i s \dfrac{\varrho'}{h}\right)}{H_0^{(1)}\left(2\pi i s \dfrac{R}{h}\right)}
\end{cases}
$$

Mittels der Näherungsformeln (60′) kann man nun wieder zeigen, daß bei $R \gg h$ das vorstehende Potential in der Nähe von $\varrho' = R$, also insbesondere in der Nähe der Ringoberflächen dieselbe Gestalt annimmt wie (95); infolgedessen können unsere Randbedingungen wieder in guter Näherung erfüllt werden, wenn man für $\alpha_s \beta_s \gamma_s \delta_s$ die früher berechneten Koeffizienten (96) einsetzt.

§ 10. Die Kapazität.

Wir gehen auch bei unseren Überlegungen zur Kapazitätswirkung der Spulen wieder von den Verhältnissen an einer spiralig aufgewundenen Spule aus und betrachten etwa, von der Mitte aus gerechnet, die ν^{te} *Windung* derselben. Auf dieser wird sich wegen der Unstetigkeit der Normalkompo-

nente der elektrischen Kraft an der Drahtoberfläche eine gewisse Ladungsmenge e_ν ansammeln, die wir gleich der Ladung des entsprechenden *Ringes* in unserer idealisierten Spule setzen können. Wegen der zeitlichen Veränderlichkeit dieser Ladung wird in die betrachtete Windung während der Zeit dt mehr Strom eintreten als aus ihr wieder heraustritt; die Differenz ist gleich der Änderung der genannten Ladungsmenge während dieser Zeitdauer. Nennen wir den so an der ν^{ten} Windung sich ausbildenden Differentialstrom J_ν, so folgt:

$$J_\nu = \frac{de_\nu}{dt} \cdot \tag{105}$$

Da e_ν aus unserem obigen Ausdruck (72) für das äußere und innere elektrische Kraftfeld berechnet werden kann, so kennen wir auch J_ν; wir wollen diese Rechnungen erst zum Schluß unseres Paragraphen ausführen, bemerken aber hier schon, daß sich ergibt $e_\nu = \nu . e_1$ und damit $J_\nu = \nu J_1$.

Daß sich die aus dieser letzten Bemerkung folgende Änderung des Stromes längs des Drahtes nicht aus der Lösung unserer Differentialgleichung (1) schon ergab, liegt an der quasistationären Behandlung unseres Problems. Hätten wir die Maxwellschen Gleichungen in Strenge, also ohne Vernachlässigung der Verschiebungsströme, integriert, so hätte sich eine solche Verschiedenheit des Stromes in der Längsrichtung des Drahtes ohne weiteres ergeben müssen. Man kommt aber bei mäßig hohen Schwingungszahlen mit den bisherigen Mitteln ganz gut aus. In diesem Fall ist nämlich die Änderung des Stromes, d. h. J_ν immer verschwindend klein gegenüber dem Gesamtstrom $\mathfrak{J} = Je^{int}$, den wir in allen früheren Rechnungen eingeführt hatten; daher wird die vermöge (105) an dem Gesamtstrom anzubringende Korrektion genügen, um die Kapazitätswirkung der Spule hinreichend genau darstellen zu können.

Wir setzen dementsprechend für die Gültigkeit der späteren Betrachtungen voraus, daß die Summe aller Differentialströme J_ν genommen über alle Windungen der Spule klein sei gegen J; ferner verlangen wir, daß die Anzahl $2m$ der Windungen eine große Zahl sei, etwa 200 und mehr, so daß 1 gegen m, m gegen m^2 usf. vernachlässigt werden kann.

Beim Übergang von der spiralig aufgewundenen Spule zu unserer idealisierten ist die stetige Änderung des Stromes längs des Drahtes in eine sprunghafte zu verwandeln. Dies kann durch eine Anordnung von der Art des Schemas Fig. 3b geschehen. Hierin ist jede Windung bzw. jeder Ring (vgl. Einleitung) dargestellt als ein kapazitätsloses mit $0, \pm 1, \ldots \pm \nu, \ldots \pm m$ bezeichnetes System, das dieselbe Selbstinduktion und denselben Widerstand hat wie der wirkliche Ring. Je zwei dieser Einzelsysteme sind an den Stellen $\pm 1', \ldots \pm \nu', \ldots$ durch ein solches System nebengeschlossen, das in ihm der Strom J_1 bzw. $J_2, \ldots J_\nu, \ldots$ fließt.

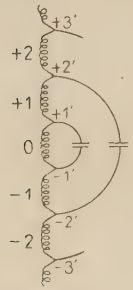

Fig. 3b.

Mehr brauchen wir von diesen Systemen nicht zu wissen; wir können uns aber etwa, wie dies nahe liegt, denken, daß sie mit Kapazität ausgestattet sind. Im 0ten System fließe der Strom J, dann muß in ± 1 ein Strom $J + J_1$ fließen und allgemein im ν^{ten} System ein solcher von der Stärke:

$$\Im_\nu = J + \sum_1^{\nu} {}^{(\alpha)} J_\alpha ;$$

da aber $J_\alpha = \alpha \cdot J_1$, wie oben beiläufig erwähnt wurde (vgl. p. 68), so folgt mit einer geringen Vernachlässigung:

$$\Im_\nu = J + \frac{\nu^2}{2} J_1 . \tag{106}$$

Besitzt die Spule $2m$ Windungen, so muß also ein Strom

$$I = \Im_m = J + \frac{m^2}{2} J_1 \tag{107}$$

der Spule zufließen, damit in ihrer Mitte der Strom J besteht.

Man ersieht unschwer, daß durch die in (106) enthaltene Korrektion des Gesamtstromes auch das magnetische Feld und damit der Widerstand und die Selbstinduktion betroffen werden; wir werden aber später zeigen, daß die so entstehenden Änderungen proportional J_1^2, also gegen die mit J_1 proportionale Kapazitätswirkung zu vernachlässigen sind. Daher kann man die früheren Werte für Widerstand und Substinduktion ohne merklichen Fehler beibehalten.

Um die im obigen charakterisierte Kapazitätswirkung der Spule bestimmen zu können, wollen wir nun die Schwingungsgleichung des Schemas Fig. 3b aufstellen; d. h. wir wollen die Beziehung suchen, die zwischen dem zugeführten Strom I und der an den Enden der Spule wirkenden elektromotorischen Kraft E besteht.

Bedeutet w den Widerstand und L die Selbstinduktion pro Windung unserer Spule, so besteht zwischen den Stellen $(\nu-1)'$ und ν' (vgl. Fig. 3b) die Potentialdifferenz

$$\mathsf{E}_{\nu'} - \mathsf{E}_{\nu-1'} = (w + i n L)\,\mathfrak{J}_{\nu-1}\,.$$

(n = Schwingungszahl in 2π Sekunden). Summiert man dies über alle $2m$ Windungen, so kommt links die gesamte an den Enden der Spule wirkende elektromotorische Kraft E und rechts im wesentlichen die nach (106) zu bildende Summe aller $\mathfrak{J}_\nu$; mit geringen Vernachlässigungen erhält man so:

$$\text{(108)}\qquad \begin{cases} \mathsf{E} = \left(J + \frac{m^2}{6} J_1\right)(W + i n A), \\ W = 2mw, \quad A = 2mL. \end{cases}$$

Es handelt sich nun darum, hierin durch Elimination von J und J_1 den zugeleiteten Strom I einzuführen. Dazu haben wir vor allem zu beobachten, daß sich, wie zum Schluß dieses Paragraphen gezeigt wird, $\mathfrak{e}_1$ proportional der pro Windung wirkenden elektromotorischen Kraft $E = \mathsf{E}/2m$ ergibt. Setzt man

$$\text{(109)}\qquad \mathfrak{e}_1 = E e_1\,,$$

so kommt aus (105) $J_1 = i n E \cdot e_1$, und daher aus (107):

$$J + \frac{m^2}{6} J_1 = I - \frac{m^2}{3} J_1 = I - i n \frac{m e_1}{6} \mathsf{E}\,.$$

Also kommt aus (108)

$$\text{(110)}\qquad I = \mathsf{E}\left(i n \frac{m e_1}{6} + \frac{1}{W + i n A}\right).$$

Hätten wir der jetzt kapazitätslos zu denkenden Spule eine Kapazität K nebengeschaltet, so würde die Gleichung lauten:

$$I = \mathsf{E}\left(i n K + \frac{1}{W + i n A}\right).$$

Der Vergleich mit der vorherigen Schwingungsgleichung zeigt, daß *wir im Fall der Spule eine Kapazität K definieren müssen*:

$$K = \frac{m\, e_1}{6}, \tag{111}$$

die im Nebenschluß an der kapazitätslos gedachten Spule liegt.

Wir wollen nun noch das in gewisser Hinsicht interessante Verhältnis zwischen der Gesamtkapazität K und denjenigen Einzelkapazitäten betrachten, die an die Punkte $\pm 1', \ldots \pm \nu', \ldots$ in Fig. 3b anzulegen sind, damit definitionsgemäß in diesen Abzweigungen die Ströme $J_1, \ldots J_\nu, \ldots$ fließen. Besteht zwischen den Punkten $\pm \nu'$ die Potentialdifferenz $2\,\mathsf{E}_\nu$, so hat man also zu definieren.

$$2\,\mathsf{E}_\nu = \frac{J_\nu}{i\, n\, C_\nu},$$

wobei C_ν die Kapazität des ν^{ten} Zweiges bedeutet. Da nun nach dem Vorigen $J_\nu = \nu J_1$ und $\mathsf{E}_\nu = \nu \cdot \mathsf{E}_1$, so folgt, daß die Kapazitäten der Abzweigungen (vgl. Fig. 3b) alle einander gleich sein müssen ($C_\nu = C$). An den Enden der Spule herrscht die Potentialdifferenz E, und man hat nach (109) und (105):

$$\mathsf{E} = \frac{J_m}{i\, n\, C} = \frac{m\, E\, e_1}{C} = \frac{e_1\, \mathsf{E}}{2\, C}, \qquad C = \frac{e_1}{2},$$

und daher aus (111):

$$K = \frac{m}{3} \cdot C.$$

Die Gesamtkapazität der Spule ist demnach $m/3$ mal so groß als die überall gleichen an einander entsprechende Windungspaare anzulegende Einzelkapazitäten. Wir finden also die Orlichsche Vermutung bestätigt, daß die Spulen sich ebenso verhalten, wie eine geschlossene Doppelleitung.[1]) An einer solchen läßt sich eine Kapazität k pro Längeneinheit definieren; ein Kabel von der Länge a wirkt dann wie eine nebengeschaltete Kapazität von der Größe $\frac{1}{3} k\, a$.

Wie oben erwähnt wurde, ist hier noch nachzuweisen, daß die durch die nachträgliche Berücksichtigung der Verschiebungsströme bewirkte Änderung von W und A mit $e_1^{\,2}$ proportional und also gegen K in (110) zu vernachlässigen sein muß.

1) E. Orlich, Kapazität und Induktivität p. 132.

Wir betrachten etwa den ν^{ten} Ring bzw. den ν^{ten} Draht, der eine Windung unserer Spule repräsentiert. In diesem fließt (99) ein Strom $\mathfrak{J}_\nu$; würde derselbe Strom auch in allen anderen Drähten bzw. Ringen fließen, so erhielten wir den früheren Wert für Widerstand und Selbstinduktion. Statt dessen fließt nun nach (99), wenn ν eine nicht zu kleine Zahl ist, in den beiden benachbarten Drähten ein Strom

$$\mathfrak{J}_{\nu+1} = \mathfrak{J}_\nu = \nu J_1 \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{J}_{\nu-1} = \mathfrak{J}_\nu - \nu J_1,$$

in den beiden darauffolgenden ein solcher von der Stärke

$$\mathfrak{J}_{\nu+2} = \mathfrak{J}_\nu + 2\nu J_1 \quad \text{bzw.} \quad \mathfrak{J}_{\nu-2} = \mathfrak{J}_\nu - 2\nu J_1 \text{ usw.}$$

In größerer Entfernung vom ν^{ten} Draht wird sich dies Bild zwar ein wenig ändern, da aber für die in Frage stehende Änderung der Stromverteilung im Draht bzw. des magnetischen Feldes nur die unmittelbar benachbarten Ströme wesentlich in Betracht kommen, so können wir uns ohne großen Fehler auch denken, daß allgemein $\mathfrak{J}_{\nu\pm p} = \mathfrak{J}_\nu \pm p\nu J_1$. Ist demnach das wahre elektrische Feld an einer Stelle ϱ, ϑ im ν^{ten} Draht gleich $\mathfrak{E} + \Delta\mathfrak{E}$, so muß es an der hierzu symmetrisch gelegenen Stelle $\varrho - \vartheta$ den Wert $\mathfrak{E} - \Delta\mathfrak{E}$ haben. Die Joulesche Wärme, durch die der Widerstand definiert ist, kann dargestellt werden als Raumintegral über $\sigma\mathfrak{E}^2$; da nun bei der Integration je zwei entgegengesetzte Stellen ϱ, $+\vartheta$ und ϱ, $-\vartheta$ überstrichen werden, so fallen die mit $\Delta\mathfrak{E}$ proportionalen Glieder fort und es bleiben nur mit $(\Delta\mathfrak{E})^2$, d. h. mit $J_1{}^2$ bzw. $e_1{}^2$ proportionale Glieder übrig. Die Änderung des Widerstandes ist somit im wesentlichen proportional $e_1{}^2$, und kann also vernachlässigt werden. Ganz dieselben Überlegungen gelten natürlich auch für die magnetische Energie und damit fürdie Selbstinduktion.

Es bleibt jetzt nur noch übrig, die Ladungsmenge e_1 des ersten Ringes zu berechnen, durch die sich nach dem Obigen die ganze Kapazitätswirkung der Spule ausdrücken läßt. Ladungen treten bekanntlich überall da auf, wo ein Sprung in der Normalkomponenten der dielektrischen Verschiebung $\mathfrak{D}$ stattfindet. Nun besteht zwischen der im elektromagnetischen Maßsystem gemessenen Verschiebung $\mathfrak{D}$ und der im gleichen Maßsystem gemessenen elektrischen Feldstärke $\mathfrak{E}$ die Beziehung:

$$\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi c^2}\mathfrak{E} \; (c = \text{Lichtgeschwindigkeit}).$$

Zur Berechnung der Ladungen ist es also erforderlich, das Verhalten von $\mathfrak{R}$ und grad $\mathfrak{U}$ (vgl. (72)) auch im Innern des Leiters zu kennen. Da (72′) auch innerhalb des Drahtes gilt, so kann man für einen beliebigen, etwa durch Rotation des Punktes P', Fig. 3a überstrichenen Stromfaden ähnlich verfahren wie früher ((73) bis (75′)) und man erhält das zu (76) analoge Resultat, daß $\mathfrak{U}$ auf dem ganzen Querschnitt des Drahtes konstant ist, daß also die Normalkomponente von grad $\mathfrak{U}$ im Innern verschwindet. Dies entspricht andererseits der Lösung von $\Delta\,\mathfrak{U} = 0$ für das Innere bei den in § 6 ermittelten Randwerten. Über $\mathfrak{R}$ können wir im Hinblick auf diese Rechnung nur aussagen, daß im Innern wie im Äußern stets $\operatorname{div}\mathfrak{R} = 0$ besteht. Dies genügt aber vollkommen, um zeigen zu können, daß $\mathfrak{R}$ keinen Beitrag zur gesuchten Gesamtladung des Ringes liefert. Betrachten wir zuerst den Raum innerhalb des durch den Leiter gebildeten Ringes. Für diesen folgt nach dem Gaussschen Satz, daß das über die gesamte Oberfläche erstreckte Integral der Normalkomponente von $\mathfrak{R}$ wegen $\operatorname{div}\mathfrak{R} = 0$ verschwindet. Wir betrachten ferner den Raumausschnitt zwischen der Ringoberfläche und den beiden Parallelflächen im Abstand $\pm h/2$ von der Ringebene, wie sie bei der Berechnung der magnetischen Energie benutzt wurden. Das über die gesamte Begrenzung dieses Raumausschnittes erstreckte Integral von $\mathfrak{R}_n$ ist ebenfalls Null; und da sich die Integrale über die beiden Parallelflächen aus Symmetriegründen aufheben, so folgt, daß auch das im Außenraum gebildete Integral von $\mathfrak{R}_n$ über die Ringoberfläche verschwindet. Für die gesamte Ladung des ersten Ringes bleibt also bis auf einen konstanten Faktor nur das nach (95) zu bildende Integral von $\partial U/\partial n$ über die Ringoberfläche übrig.

Da man, wie früher gezeigt wurde, für $\mathfrak{U}$ an der Oberfläche der Ringe das ebene Potential (95) bzw. (94) mit der Ergänzung (101) benutzen kann, so kommt:

$$\mathfrak{e}_1 = 2\pi R \cdot r \int_0^{2\pi} \mathfrak{D}_\varrho \, d\vartheta ,$$

$$= -\frac{\varepsilon \cdot r \cdot R}{2c^2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \mathfrak{U}}{\partial \varrho} \right)_{\varrho = r} d\vartheta .$$

Nach (95′) und (109) folgt hieraus:

$$e_1 = -\frac{\varepsilon \cdot R}{2\,c^2} \cdot r \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial U}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=r} d\vartheta ; \tag{112}$$

wir führen die Integration in der komplexen Ebene von $z = \varrho\, e^{i\vartheta}$ bzw. $z = x + iy$ aus und schreiben hierzu[1]):

$$U = \sum_0^{\infty}{}^{(\nu)}\, a_\nu \,\Re(\Gamma_\nu) + \sum_1^{\infty}{}^{(\nu)}\, b_\nu \,\Im\mathfrak{m}(G_\nu).$$

Nach (11) und (86) ist nun für $\nu \geqq 1$:

$$\frac{\partial}{\partial \varrho}(G_\nu, \Gamma_\nu) = \frac{d}{dz}(G_\nu, \Gamma_\nu)\, e^{i\vartheta} = -\,\nu (G_{\nu+1}, \Gamma_{\nu+1})\, e^{i\vartheta},$$

und da $r\, e^{i\vartheta}\, d\vartheta$ gleich $-\,i\,dz$ gesetzt werden kann:

$$r \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \varrho}(G_\nu, \Gamma_\nu)\, d\vartheta = i\,\nu \int (G_{\nu+1}, \Gamma_{\nu+1})\, dz ;$$

Das Integral ist über die Peripherie des ersten Drahtquerschnittes zu nehmen und verschwindet für $\nu \geqq 1$, da dann in der Entwicklung von G bzw. Γ (vgl. (9) und (87)) kein Glied mit z^{-1} vorkommt. Daher ist:

$$r \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial U}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=r} d\vartheta = a_0 \int_0^{2\pi} \Re\left(\frac{\partial \Gamma_0}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=r} r\, d\vartheta ;$$

ähnlich wie oben folgt nun wieder:

$$r \int_0^{2\pi} \Re\left(\frac{\partial \Gamma_0}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=r} d\vartheta = \Re\left\{\int_0^{2\pi} \Gamma_1\, r\, e^{i\vartheta}\, d\vartheta\right\} = \Im\mathfrak{m}\left\{\int \Gamma_1\, dz\right\},$$

und da nach (88):

$$\int_0 \Gamma_1\, dz = 2\,\pi\, i, \tag{112′}$$

so kommt endlich aus (112) und (99):

$$e_1 = -\frac{\varepsilon}{c^2} \cdot \frac{\pi R}{v\, \Phi}. \tag{113}$$

1) Der jetzige Index ν ist nicht mit dem obigen Index ν zu verwechseln, der zur Numerierung der Windungen diente.

Man ersieht unschwer, daß man bei einem Umgang um den Mittelpunkt des α^{ten} statt des ersten Drahtes den α-fachen Wert bekommen würde, da jetzt in (112′) das Residuum nicht gleich 1, sondern gleich α würde. Die aus (113) gemäß (109) berechnete Ladung e_1 stellt den Mittelwert der auf der ersten Windung der Spule befindlichen wirklichen Ladung dar. Wie man sieht, wäre zu deren Bestimmung nur eine ganz oberflächliche Kenntnis des elektrischen Potentials, nämlich diejenige von a_0, nötig gewesen. Ein Blick auf unsere bisherigen Rechnungen zeigt aber, daß, von § 9 abgesehen, die Kenntnis dieses Koeffizienten nicht ohne den oben gemachten Umweg zu erhalten war.

Daran, daß e_1 gemäß (100) von der Schwingungszahl unabhängig ist, ersieht man nach (111), daß auch *die Kapazität nicht von k abhängt.* Es ist jedoch zu betonen, daß diese Unabhängigkeit nur so lange von der Theorie verlangt ist, als die Wellenlänge des Stromes groß ist gegen die Spulendimensionen. Dielektrische Verluste sind hierbei natürlich nicht mit berücksichtigt.

Drittes Kapitel.

Näherungsformeln und numerische Resultate.

Ich gebe zunächst einen Überblick über die wichtigsten im vorstehenden eingeführten Bezeichnungen, um einen Vergleich unserer Formeln, insbesondere der hier abzuleitenden Näherungsformeln, mit den bisher vorliegenden zu erleichtern. Es bedeuteten:

r den Drahtradius,
R den Spulenradius,
ε die Dielektrizitätskonstante,
c die Lichtgeschwindigkeit,
h die Ganghöhe,
σ die Leitfähigkeit ($= 5{,}9 \cdot 10^{-4}\,\text{cm}^{-2}\,\text{sec}^{+1}$ für Kupferdraht),
μ die magnetische Permeabilität,
n die Schwingungszahl in 2π sec.

Diese Größen traten hauptsächlich in den Verbindungen auf:

$$k^2 = -4\pi i n \mu \sigma, \quad v = \frac{2\pi r}{h}$$

und:

$$\lambda_\nu = \frac{\mu \nu}{k r} \frac{J_\nu(k r)}{J_\nu'(k r)}; \quad \lambda_0 = \frac{\mu}{k r} \cdot \frac{J_0(k r)}{J_0'(k r)} .$$

J_ν bedeutet dabei die ν^{te} Besselsche Funktion und J_ν' ihren Differentialquotient nach dem Argument.

Wir hatten früher von w und w_0 nur das Verhältnis w/w_0 betrachtet und über die Bedeutung von w und w_0 einzeln genommen noch nichts weiter festgesetzt; ferner war in (71) die Selbstinduktion pro Längeneinheit berechnet. Im folgenden soll nun *pro Windung* bedeuten:

w den Wechselstromwiderstand,
w_0 den Gleichstromwiderstand,
L die Selbstinduktion bei Wechselstrom,

ferner:

$\mathfrak{e}_1 = E e_1$ die gesamte Ladung der ersten Windung,
$E = \mathfrak{E}/2m$ die EMK. pro Windung,
$2m$ die Anzahl der Windungen der Spule,

und abkürzend:

$$W = 2 m w; \quad \Lambda = 2 m L$$

den gesamten Widerstand bzw. die gesamte Selbstinduktion der Spule.

Näherungsweise darstellbar sind unsere Formeln nur im Falle kleiner und in demjenigen sehr großer Werte von $k r$. Damit $k r$ eine große Zahl wird, muß im allgemeinen die Schwingungszahl n sehr groß genommen werden. Da aber für solche schnellen Schwingungen unsere obigen Betrachtungen wegen der Vernachlässigung der Verschiebungsströme versagen, so werden wir uns auf den Fall kleiner $k r$ beschränken müssen. Da es aber auch hier vorkommen kann, daß n beträchtlich groß wird, wenn nur r hinreichend klein ist, so wollen wir als Kriterium für die Gültigkeit unserer Formeln aufstellen, daß die benutzte Wellenlänge groß ist gegen die Wellenlänge der Eigenschwingung der Spule, die ja nach den Untersuchungen von Drude bei langen Spulen etwa gleich dem doppelten bis $1^1/_2$ fachen der Gesamtlänge des Spulendrahtes ist.[1]) Beträgt etwa die Länge des Spulen-

1) P. Drude, Ann. d. Phys. 9. p. 293. 1902.

drahtes 40 m, so wird man noch hinreichend genaue Werte für Wellenlängen von 2 km erhalten.

Für mittlere Werte von kr, also etwa $kr \sim 1$ führt hingegen die Auswertung unserer Formeln zu umständlichen Rechnungen, die ich vorläufig noch nicht ausführen konnte und die später in Form von übersichtlichen Tabellen der gegenwärtigen Arbeit angefügt werden sollen.

Obwohl der Fall $k = \infty$, wie schon mehrfach betont, keine physikalische Bedeutung hat, habe ich doch nach dem Vorgang von Sommerfeld und Coffin beim Widerstand und bei der Selbstinduktion den Grenzübergang zu unendlich schnellen Schwingungen gemacht. Die hierbei auftretenden Rechnungen sind im allgemeinen ebenfalls von sehr komplizierter Art und können daher als Beispiel für die eben genannten Rechnungen im Falle $kr \sim 1$ gelten. Ihre Durchführung war mit einiger Genauigkeit nur möglich für $v = \pi/8$ und $v = \pi/4$, wogegen schon die Werte für $v = \pi/2$ und um so mehr diejenigen für $v = \pi$ in der letzten angegebenen Dezimale ziemlich unsicher sind. Die genauen Werte gedenke ich später tabellarisch anzugeben.

§ 11. Näherungsformeln.

(Für kleines kr.)

Wir setzen $\mu = 1$, weil der Fall $\mu \neq 1$ praktisch von geringem Interesse ist und unsere Formeln hierfür unnötig kompliziert werden, und stellen einige Reihenentwickelungen voran, die wir im folgenden öfters verwenden werden:

$$(114)\quad \begin{cases} \lambda_\nu = \dfrac{\nu}{kr}\dfrac{J_\nu(kr)}{J_\nu'(kr)} = 1 + \dfrac{2}{\nu(\nu+1)}\left(\dfrac{kr}{2}\right)^2 \\ \qquad + 2\,\dfrac{3\nu+4}{\nu^2(\nu+1)^2(\nu+2)}\left(\dfrac{kr}{2}\right)^4 + 4\,\dfrac{5\nu+6}{\nu^3(\nu+1)^3(\nu+3)}\left(\dfrac{kr}{2}\right)^6, \end{cases}$$

$$(115)\quad \frac{1}{1+\lambda_\nu} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\nu(\nu+1)}\left(\frac{kr}{2}\right)^2 - \frac{1}{\nu^2(\nu+1)(\nu+2)}\left(\frac{kr}{2}\right)^4,$$

$$(116)\quad \begin{cases} \dfrac{1-\lambda_\nu}{1+\lambda_\nu} = \dfrac{2}{1+\lambda_\nu} - 1 = -\dfrac{1}{\nu(\nu+1)}\left(\dfrac{kr}{2}\right)^2 \\ \qquad - \dfrac{2}{\nu^2(\nu+1)(\nu+2)}\left(\dfrac{kr}{2}\right)^4, \end{cases}$$

$$(117)\quad \left\{ \lambda_0 = \frac{1}{kr}\,\frac{J_0(kr)}{J_0'(kr)} = -\frac{1}{2}\left(\frac{kr}{2}\right)^{-2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{24}\left(\frac{kr}{2}\right)^2 + \frac{1}{96}\left(\frac{kr}{2}\right)^4 + \frac{1}{360}\left(\frac{kr}{2}\right)^6 . \right.$$

a) **Näherungsformeln für die C_m.**

Wir wollen die C_m bis zur vierten Potenz von k entwickeln und setzen zu diesem Zweck an:

$$(118)\qquad C_m = C_m^{(0)} + \left(\frac{kr}{2}\right)^2 C_m^{(1)} + \left(\frac{kr}{2}\right)^4 C_m^{(2)} .$$

Die Bestimmung dieser drei Koeffizienten könnte mittels der Formeln (40) und (44) geschehen; es ist aber vorteilhafter, hierzu wieder auf die Funktionalgleichungen (36) bzw. (38) und (41) zurückzugehen. Wir betrachten vorerst den Fall gerader m; hierfür ist nach (116) und (118):

$$C_{2\nu}\,\frac{1-\lambda_{2\nu}}{1+\lambda_{2\nu}} = -\frac{C_{2\nu}^{(0)}}{2\nu(2\nu+1)}\left(\frac{kr}{2}\right)^2 - \frac{1}{2\nu(2\nu+1)}\left\{C_{2\nu}^{(1)} + \frac{C_{2\nu}^{(0)}}{2\nu(\nu+1)}\right\}\left(\frac{kr}{2}\right)^4 .$$

Durch Einsetzen in die erste Gleichung (36) findet man so als Koeffizienten gleicher Potenzen von k:

$$(119)\quad \left\{ \begin{aligned} C_{2m}^{(0)} &= -2(-1)^m \frac{B_{2m}}{2m!}\, v^{2m-1}, \\ C_{2m}^{(1)} &= (-1)^m \cdot \frac{v^{2m-1}}{(2m-1)!} \sum_1^\infty (\nu)(-1)^\nu \frac{v^{2\nu+1}}{2\nu!}\,\frac{B_{2m+2\nu}}{2m+2\nu} \cdot \frac{C_{2\nu}^{(0)}}{2\nu(2\nu+1)}, \\ C_{2m}^{(2)} &= (-1)^m \frac{v^{2m-1}}{(2m-1)!} \sum_1^\infty (\nu)(-1)^\nu \cdot \frac{v^{2\nu+1}}{2\nu!} \cdot \frac{B_{2m+2\nu}}{2m+2\nu}\left\{\frac{C_{2\nu}^{(1)}}{2\nu(2\nu+1)} + \frac{C_{2\nu}^{(0)}}{(2\nu)^2(2\nu+1)(\nu+1)}\right\} . \end{aligned} \right.$$

(Die $B_{2\nu}$ bedeuten die sogenannten Bernoullischen Zahlen, $v = 2\pi r/h$). Die Berechnung der Koeffizienten $C_{2m}^{(1)}$ und besonders von $C_{2m}^{(2)}$ ist offenbar recht kompliziert; ihre Werte sollen daher ebenfalls tabelliert und ihr Verlauf als Funktionen von v durch Kurven veranschaulicht werden. Mittels gewisser

im Anhang abgeleiteter Ungleichungen für die $a_\nu^{(2m)}$ von (38) kann man nun zeigen, daß:

$$(120)\quad \left(C_{2m}^{(1)}\right) < \frac{1}{18}\left(\frac{\pi}{3}\right)^3\left(\frac{v}{\pi}\right)^{2m+3}, \quad \left(C_{2m}^{(2)}\right) < \frac{1}{48}\left(\frac{\pi}{3}\right)^{10}\left(\frac{v}{\pi}\right)^{2m+4},$$

woraus zu sehen ist, daß diese Koeffizienten mit wachsendem Index nur dann schnell gegen 0 konvergieren, wenn v hinreichend von π entfernt ist. Für $v = \pi$ würden die Formeln (120) ergeben, daß alle $C_m^{(1)}$, $C_m^{(2)}$ endlich bleiben; es ist aber zu bemerken, daß die rechten Seiten von (120) sehr viel größer sind als die wirklichen Werte der betreffenden Koeffizienten und daß diese auch im Fall $v = \pi$ sehr wohl mit wachsendem Index verschwinden können. Dagegen läßt (120) erkennen, daß schon für $v = \pi/2$ überall die ersten vier bis fünf Glieder bzw. Koeffizienten für eine hinreichende Genauigkeit genügen werden.

Für ungerades m findet man auf ähnliche Weise:

$$(121)\quad \begin{cases} C_1^{(0)} = 1, \quad C_{2m-1}^{(0)} = 0 \text{ für } m > 1, \\ C_{2m-1}^{(1)} = -\frac{1}{2}\,\frac{(-1)^m}{(2m-2)!}\,\frac{B_{2m}}{2m}\cdot v^{2m}, \\ C_{2m-1}^{(2)} = -(-1)^m\,\frac{v^{2m}}{(2m-2)!}\left\{\frac{1}{3}\,\frac{B_{2m}}{2m} - \sum_1^\infty{}^{(\nu)}(-1)^\nu \right. \\ \qquad \left. \cdot\,\frac{v^{2\nu-2}}{(2\nu-1)!}\,\frac{B_{2m+2\nu-2}}{2m+2\nu-2}\cdot\frac{C_{2\nu-1}^{(1)}}{2\nu(2\nu-1)}\right\}. \end{cases}$$

Dabei besteht zwischen C_1 und c_1 die Beziehung (35), nicht diejenige von (42), die im gegenwärtigen Fall unpraktisch wäre.

An den Formeln (119) und (121) sind nur die Ausdrücke für die $C^{(1)}$ und $C^{(2)}$ neu; die $C^{(0)}$ waren bei Sommerfeld schon bekannt. Darauf gründete sich seine Näherungsformel für das Verhältnis w/w_0, für die wir hier vermöge unserer Kenntnis der $C^{(1)}$ und $C^{(2)}$ auch das nächste Entwickelungsglied angeben können.

b) Das Verhältnis w/w_0.

Wegen der Substitution (35) hat man im Hinblick auf 48) zu bilden:

$$(122)\quad \begin{cases} -\frac{r}{2}\,\frac{C_\nu}{1+\lambda_\nu}\cdot\frac{\overline{C_\nu}}{1+\overline{\lambda_\nu}}\,\Re\left\{\frac{k\,J_\nu(kr)}{J_\nu'(kr)}\right\} = \frac{C_\nu^{(0)\,2}}{\nu^2(\nu+1)}\left(\frac{|k|\,r}{2}\right)^4 \\ + \left\{\frac{C_\nu^{(1)\,2} - 2\,C_\nu^{(0)}\,C_\nu^{(2)}}{\nu^2(\nu+1)} - \frac{(5\nu+6)\,C_\nu^{(0)\,2}}{\nu^4\cdot(\nu+1)^2\,(\nu+2)\,(\nu+3)}\right\}\left(\frac{|k|\,r}{2}\right)^6; \end{cases}$$

dabei bedeutet $|k|$ den absoluten Betrag von k und es ist

$$k^2 = i|k|^2, \text{ d. h. } |k|^2 = 4\pi n \mu \sigma.$$

Beachtet man, daß nach (121) alle ungeraden $C^{(0)}$ außer $C_1^{(0)}$ verschwinden, so erhält man aus (48) unter Benutzung von (117) und (122):

$$\frac{w}{w_0} = 1 + \left(\frac{|k|\,r}{2}\right)^4 \cdot P + \left(\frac{|k|\,r}{2}\right)^8 Q, \tag{123}$$

wobei P die schon von Sommerfeld angegebene Bedeutung:

$$P = \frac{1}{12} + \frac{v^2}{4} + \frac{v^2}{8} \sum_1^\infty{}^{(\nu)} \frac{C_{2\nu}^{(0)\,2}}{\nu^2(2\nu+1)} \tag{123'}$$

hatte, während der hier neu hinzutretende Koeffizient durch den komplizierten Ausdruck:

$$\left\{\begin{aligned} Q = &-\frac{1}{180} - \frac{11}{96} v^2 - \frac{v^2}{2} C_1^{(2)} + \frac{v^2}{2} \sum_1^\infty{}^{(\nu)} \frac{C_{2\nu-1}^{(1)\,2}}{2\nu(2\nu-1)^2} \\ &+ \frac{v^2}{8} \sum_1^\infty{}^{(\nu)} \frac{C_{2\nu}^{(1)\,2} - 2\, C_{2\nu}^{(0)}\, C_{2\nu}^{(2)}}{\nu^2(2\nu+1)} \\ &- \frac{v^2}{16} \sum_1^\infty{}^{(\nu)} \frac{(5\nu+3)\, C_{2\nu}^{(0)\,2}}{\nu^4(2\nu+1)^2(2\nu+2)(2\nu+3)}. \end{aligned}\right. \tag{123''}$$

dargestellt ist.

c) Die Selbstinduktion.

Da der Koeffizient von $(k|\,r)^8$ bei der Selbstinduktion noch bedeutend komplizierter wird wie beim Widerstand, so wollen wir uns im gegenwärtigen Fall auf die Angabe der beiden ersten Entwickelungsglieder beschränken. Die c_ν und λ_ν treten in (71) in den Verbindungen $c_\nu \lambda_\nu / \nu$ und $c_\nu(1-\lambda_\nu)$ auf; da

$$\frac{\lambda_\nu}{1+\lambda_\nu} = 1 - \frac{1}{1+\lambda_\nu},$$

so kommt nach (111) und mit Rücksicht auf (35):

$$\begin{aligned} \Re\left(\frac{c_\nu}{\nu}\,\lambda_\nu\right) &= \Re\left(\frac{C_\nu}{\nu} \cdot \frac{\lambda_\nu}{1+\lambda_\nu}\right) \\ &= \frac{C_\nu^{(0)}}{2\nu} - \left\{\frac{C_\nu^{(0)}}{\nu^3(\nu+1)(\nu+2)} + \frac{C_\nu^{(1)}}{2\cdot\nu^2\cdot(\nu+1)} + \frac{C_\nu^{(2)}}{2\nu}\right\}\left(\frac{|k|\,r}{2}\right)^4, \end{aligned}$$

und nach (116):

$$\Re\{c_\nu(1-\lambda_\nu)\} = \Re\left\{C_\nu \begin{matrix} 1-\lambda_\nu \\ 1+\lambda_\nu \end{matrix}\right\}$$

$$= \left\{\frac{C_\nu^{(1)}}{\nu(\nu+1)} + \frac{2\,C_\nu^{(0)}}{\nu^2(\nu+1)(\nu+2)}\right\}\left(\frac{|k|\,r}{2}\right)^4.$$

Endlich ist:

$$v\,\Re(c_0\,\lambda_0) = \frac{1}{4} - \frac{1}{96}\left(\frac{|k|\,r}{2}\right)^4,$$

so daß man aus (71) erhält:

$$L = \frac{4\pi^2 R^2}{h} + 4\pi R\left(L_0 + \left(\frac{|k|\,r}{2}\right)^4 \cdot L_1\right), \tag{124}$$

wobei die an der in gewöhnlicher Weise berechneten Selbstinduktion $4\pi^2 R^2/h$ anzubringende Korrektion L_0 die Bedeutung hat:

$$L_0 = \tfrac{1}{4} - \log(1-e^{-v}) - \frac{v}{2} + \frac{v}{2}\sum_1^\infty{}^{(\nu)}\,\frac{C_{2\nu}^{(0)}}{2\nu}, \tag{124'}$$

von komplizierterer Bauart ist wieder L_1:

$$\left\{\begin{aligned} L_1 = &-\frac{1}{96} + \frac{v}{6} - \frac{v^2}{6}\frac{1}{1-e^{-v}} + \frac{v}{8}\sum_1^\infty{}^{(\nu)}\frac{(S_{2\nu}-1)\,C_2{}^{(0)}_\nu}{\nu^3(2\nu+1)(2\nu+2)} \\ &+ \frac{v}{2}\sum_1^\infty{}^{(\nu)}\frac{(-1)^\nu(S_\nu-1)\,C_\nu^{(1)}}{\nu^2(\nu+1)} - \frac{v}{2}\sum_1^\infty{}^{(\nu)}(-1)^\nu\,\frac{C_\nu^{(2)}}{\nu}. \end{aligned}\right. \tag{124''}$$

Hierin ist S_1 aus (70‴) zu entnehmen und die übrigen S_ν aus (70″) oder (70‴). Da die S_ν mit wachsendem Index sich dem Wert 1 nähern, so sind die vorstehenden Summen unschwer zu berechnen.

§ 12. Formelvergleichung.

Den Vergleich der Formeln von Sommerfeld und Cohen[1] für den Widerstand habe ich an anderer Stelle ausführlich behandelt[2], ich beschränke mich daher hier auf die Wiedergabe der dortigen Resultate. Die Cohensche Formel kann für kleines kr so geschrieben werden:

$$\frac{w}{w_0} = 1 + \left(\frac{|k|\,r}{2}\right)^4 \cdot 0{,}348 \cdot v^2,$$

1) L. Cohen, Bull. Bur. of. Stand. 4. Nr. 1. p. 161. 1907.
2) W. Lenz, Jahrb. d. drahtl. Telegr. u. Telef. 1910/11.

so daß also P (vgl. (123)) bei Cohen eine Parabel darstellt. In Fig. 4 sind die Cohenschen Werte punktiert eingetragen und die Kurve (123') ausgezogen. Wie man sieht, stimmen beide Kurven für $v < \pi/2$ gut überein.

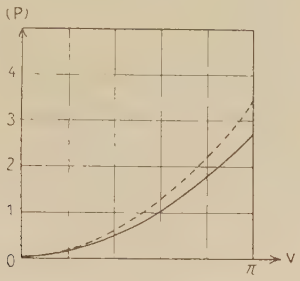

Fig. 4.

Für unendlich hohe Schwingungszahlen erhält man nach Cohen, wie auch nach Formel (48):

$$\frac{w}{w_0} = r\sqrt{\frac{\pi n \mu \sigma}{2}} \cdot \varphi(v),$$

wobei:

$$\varphi_{\text{Cohen}} = \frac{v^2}{\pi},$$

$$\varphi_{\text{Sommerfeld}} = 1 + \frac{v^2}{2} \sum_{1}^{\infty} (\nu) C_\nu^{\,2} (k = \infty).$$

Mit $\varphi_{\text{Sommerfeld}}$ ist der aus (48) folgende Wert bezeichnet, den Sommerfeld in der mehrfach erwähnten Arbeit ableitet.[1]) Er konnte zeigen, daß $\varphi(\pi) = 3{,}73$ und $\varphi(0) = 1$. Unter Hinzuziehung geeigneter Messungen von Black konnte er dann den mutmaßlichen Verlauf der φ-Kurve angeben; er ist in Fig. 5 strichpunktiert eingezeichnet. Die Berechnung mittels unserer Formeln für die c_ν ergibt etwas höhere Werte; man findet:

$v =$	$\pi/8$	$\pi/4$	$\pi/2$	π
$\varphi =$	1,076	1,28	1,92	(3,73)

Der hier eingeklammerte Wert von φ für $v = \pi$ ist von Sommerfeld entnommen; die übrigen Werte sind in den

1) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 24. p. 623 ff. 1907.

letzten angegebenen Dezimalstellen unsicher. Die so erhaltene φ-Kurve ist in Fig. 5 ausgezogen.

Interessant ist der Verlauf dieser Kurve in der Nähe des Punktes $v = 0$. Hier verschwinden ja nach (39) und (43)

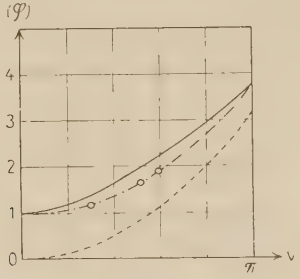

Fig. 5.

alle C_ν, folglich nach (35) auch alle c_ν bis auf c_1, wofür man aus (42) wegen $\lambda_1(\infty) = 0$ erhält:

$$c_1 = 1\,;$$

also:

$$\varphi = 1 + \frac{v^2}{2}$$

in der Nähe von $v = 0$. Indem Sommerfeld annahm[1]), daß der Fall $v = 0$ dem Gleichstromfall gleich komme (für den die Maxwellsche Gitterfunktion eine einfache Lösung bietet), erhielt er hierfür $1 + v^2/8$. Denn hierfür ist ebenfalls $C_1 = 0$, aber wegen $\lambda(0) = 1$ kommt $c_1(k = 0) = \frac{1}{2}$. Hieraus erhellt, daß der Fall sehr dünner Drähte und beliebig hoher Schwingungszahl immer noch erheblich vom Gleichstromfall verschieden ist.

Die Cohensche φ-Kurve ist punktiert eingezeichnet und weicht besonders für abnehmende Werte von v stark von der Sommerfeldschen Kurve und der meinigen, wie auch von den mit 0 bezeichneten Blackschen Meßwerten ab.

Für die Selbstinduktion pro Längeneinheit der Spule findet Coffin[2]) bei kleinem kr:

$$L = \frac{4\pi^2 R^2}{h} + \frac{4\pi R}{h}\left[L_0 + \left(\frac{k/r}{2}\right)^4 L_1\right].$$

1) A. Sommerfeld, l. c. p. 629.
2) J. G. Coffin, Bull. Bur. of Stand. 2. p. 351. 1906.

wobei

$$L_0 = \tfrac{2}{3} v, \quad L_1 = -1{,}08\, v\,.$$

Hieran hat Esau[1]) eine Korrektion angebracht derart, daß:

$$L_0 = \tfrac{2}{3} v, \quad L_1 = -0{,}109\, v^3\,.$$

Die Werte[2]) die sich für L_0 aus (124′) ergeben sind in Fig. 6 ausgezogen; die Coffin-Esauschen Werte von L_0 liegen auf der in Fig. 6 punktierten Geraden.

Übrigens hat auch Cohen[3]) bei seiner Berechnung der Selbstinduktion bei Wechselstrom einen Term $L_0 = \frac{2}{3} v$ ein-

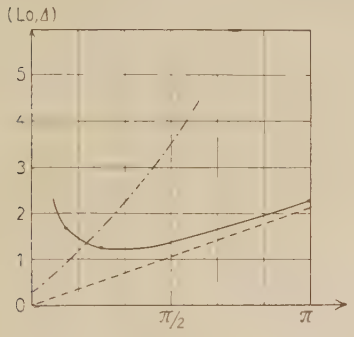

Fig. 6.

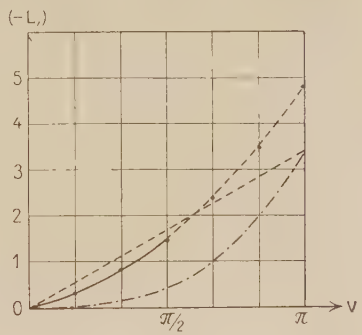

Fig. 7.

geführt, den er von Heaviside[4]) entlehnt. Die Abweichung dieses Coffin-Heavisideschen Korrektionsgliedes von den aus (124′) berechneten genauen Werten ist, wie man aus Fig. 6 ersieht, nicht sehr beträchtlich, solange man sich im Gebiet dichter Wickelung befindet.[5])

---

1) A. Esau, Ann. d. Phys. **34.** p. 57. 1911.

2) Die Kurven Fig. 6 u. 7 wolle man nur als orientierend betrachten, da sich, wie bei der Korrektur bemerkt wurde, ein Vorzeichenfehler in die numerischen Rechnungen eingeschlichen hatte. In einem demnächst in den Ann. d. Physik zu publizierenden Auszug werde ich die berichtigten Kuren bringen.

3) L. Cohen, Bull. Bur. of Stand. **4.** Nr. 1. p. 176. 1907.

4) O. Heaviside, Collected papers **1.** p. 356.

5) Die in Fig. 6 eingezeichnete strichpunktierte Kurve bezieht sich auf unendlich schnelle Schwingungen, hat aber wegen der angeführten Fehlerhaftigkeit unserer numerischen Rechnungen keine hinreichend gesicherte Bedeutung mehr.

Für sehr kleine Werte von v geht (124') über in $-\log v$; dies erinnert an den Wert des Selbstinduktionskoeffizienten eines einfachen Kreises, der bekanntlich für gegenüber dem Halbmesser R verschwindendem Drahtradius r wie $-4\pi R \log r$ unendlich wird. Die Heaviside-Coffinsche Formel versagt in diesem Gebiete also gänzlich; man beachte jedoch, daß (124') nur gilt, wenn $R \gg h$.

Günstiger liegen die Verhältnisse bei der Korrektion L_1; hierfür ergibt (124") den in Fig. 7 dargestellten Kurvenverlauf. Der Wert von L_1 für $v = \pi$ ist unsicher; deshalb ist in Fig. 7 nur der Kurvenverlauf von $v = 0$ bis $v = \pi/2$ ausgezogen, während die Fortsetzung punktiert ist. Die Coffinschen Werte von L_1 liegen wieder auf der punktierten Geraden; die Esausche Korrektion deformiert diese Gerade in eine die beiden Endpunkte verbindende parabolische Kurve (strichpunktiert). Während die Coffinschen Werte den wahren Betrag von L_1 ein wenig überschreiten, sind andererseits die Esauschen Werte zu klein.

Über die Kapazität existieren bis jetzt noch keine Formeln, so daß ich mich hier auf eine Angabe der Größe und des Kurvenverlaufes derselben beschränken muß, wie sie aus (111) und (125) folgen. Man erhält:

$$K = -\frac{m e_1}{6} = -\frac{m}{6} \cdot \frac{\varepsilon}{c^2} \cdot \frac{\pi R}{v \cdot \Phi} \cdot \tag{125}$$

Die Funktion Φ kann aus (100) berechnet werden; man findet:

$v =$	$\pi/8$	$\pi/4$	$\pi/2$	π
$-\Phi =$	2,41	0,66	(0,3)	0

Von Φ ist aus früheren Erörterungen bekannt, daß es für $v = \pi$ verschwindet; der Wert für $\pi/2$ ist unsicher, dagegen sind diejenigen für $\pi/4$ und $\pi/8$ höchstens in der letzten Dezimale ungenau. Für sehr kleine Werte von v folgt aus (92):

$$\Phi = \frac{1}{v} \log v .$$

Wir haben also in dem allerdings seltenen Fall eines kleinen v ($v \ll \pi/8$) für die Kapazität der Spule die einfache Näherungsformel:

$$K = -\frac{m}{6} \cdot \frac{\varepsilon}{c^2} \cdot \frac{\pi R}{\log v} \cdot \tag{126}$$

Dies, wie überhaupt die Form des Ausdruckes (125), erinnert an die ähnlich gelagerten Verhältnisse an einer Doppelleitung von kleinem Drahtradius r gegenüber dem Abstand d der Drähte. Für die gleiche Drahtlänge $2\pi R \cdot 2m$ ergibt sich nämlich nach Orlich[1]), daß die Doppelleitung wirkt wie ein kapazitätsfreies System, dem eine Kapazität:

$$K = \frac{m}{6} \cdot \frac{\varepsilon}{c^2} \cdot \frac{\pi R}{\log d/r}$$

nebengeschaltet ist.

Man ersieht übrigens aus der üblichen Größe der Werte für m (einige hundert) und R (einige cm), daß sich aus (125) und (126) für die Kapazität Werte von der Größenordnung 10^{-19} bis 10^{-18} ergeben; die Kapazität unifilar gewickelter Spulen wird also ungefähr 10^{-10} bis 10^{-9} Farad betragen.

Ein Vergleich mit der Erfahrung ist bezüglich der Widerstandsformeln für kleine Schwingungen schon mehrfach[2]) gemacht worden; danach steht ihre Gültigkeit außer Zweifel. Allerdings lassen sich unsere Formeln nicht auf die letzthin von A. Esau[3]) veröffentlichten Meßwerte anwenden, da bei den dort untersuchten Spulen R/h meist nicht groß gegen 1 war, außer in einem Falle, wo $R/h \cong 10$ und entsprechend die Übereinstimmung mit den berechneten Werten recht gut war.[4]) Aus dem genannten Grund habe ich es auch nicht unternommen, die Esauschen Werte für die Selbstinduktionserniedrigung mit meinen berechneten zu vergleichen. Da über die Kapazitätswirkung unifilar gewickelter und als unendlich lang anzusehender Spulen noch gar keine experimentellen Werte vorliegen, so muß ich es bei den obigen theoretischen Angaben bewenden lassen.

---

1) E. Orlich, Kapazität und Induktivität p. 129 u. 132.

2) W. Lenz, Jahrbuch für drahtlose Telegraphie 1911.

3) A. Esau, Ann. d. Phys. 34. p. 57ff. 1911.

4) Der Wert des Spulenradius ist in der betreffenden Arbeit nicht angegeben; Hr. Esau hat ihn mir brieflich mitgeteilt.

Anhang.

Konvergenzfragen.

Wir tragen hier einige Betrachtungen nach, die uns einerseits zu der mehrfach benutzten Größenabschätzung der Koeffizienten C_ν führten und andererseits zum Beweis der Konvergenz unserer Reihen (39) und (43) dienen. Wir gehen aus von der nach (40) stets geltenden Beziehung:

$$\left|A_p^{(2m)}\right| \leqq \sum_1^p{}_\nu \left|a_\nu^{(2m)}\right| \cdot \left|A_{p-\nu}^{(2\nu)}\right| \tag{124}$$

und betrachten demgemäß vor allem den absoluten Betrag der $a_\nu^{(2m)}$ bzw. denjenigen von $1 - \lambda_\nu / 1 + \lambda_\nu$. Eine Funktion

$$w = \frac{1 - z}{1 + z}$$

bildet bekanntlich die rechte Hälfte der z-Ebene auf das Innere des Einheitskreises der w-Ebene ab; sobald also z einen positiven reellen Teil besitzt, fällt w in den Einheitskreis, d. h. $|w| \leqq 1$. Wir können nun zeigen, daß der reelle Teil von λ_ν stets positiv bleibt, wie auch k und r gewählt sein mögen, und daß also:

$$\left|\frac{1 - \lambda_\nu}{1 + \lambda_\nu}\right| \leqq 1 .$$

Zum Beweis setzten wir an:

$$J_\nu(k r) = \left(\frac{k r}{2}\right)^\nu (A_\nu + i B_\nu),$$

$$k r J_\nu'(k r) = \left(\frac{k r}{2}\right)^\nu (A_\nu' + i B_\nu'),$$

worin die A den reellen, die B den imaginären Teil der betreffenden Reihenentwickelungen darstellen. Setzen wir ferner abkürzend:

$$\left(\frac{k r}{2}\right)^2 = - i \alpha, \quad \alpha = \pi n \mu \sigma \cdot r^2,$$

so kommt:

$$A_\nu = \sum_0^\infty{}^{(n)} \frac{(-1)^n \alpha^{2n}}{2n!\,(2n+\nu)!}, \qquad B_\nu = -\sum_1^\infty{}^{(n)} \frac{(-1)^n \alpha^{2n-1}}{(2n-1)!\,(2n+\nu-1)!},$$

$$A_\nu' = \sum_0^\infty{}^{(n)} \frac{(-1)^n \alpha^{2n}(4n+\nu)}{2n!\,(2n+\nu)!},$$

$$B_\nu' = -\sum_1^\infty{}^{(n)} \frac{(-1)^n \alpha^{2n-1}}{(2n-1)!\,(2n+\nu+1)!}\cdot(4n+\nu-2).$$

Der reelle Teil von

$$\frac{\lambda_\nu}{\mu\,\nu} = \frac{A_\nu + i\,B_\nu}{A_\nu' + i\,B_\nu},$$

ist offenbar dann positiv, wenn:

$$A_\nu\,A_\nu' + B_\nu\,B_\nu' > 0.$$

Führt man die Multiplikation der Reihen aus, so gelangt man zu der Beziehung:

$$A_\nu\,A_\nu' + B_\nu\,B_\nu' = \sum_0^\infty{}^{(n)} \frac{\alpha^{2n}}{n!\,(n+\nu)!\,(2n+\nu-1)!}.$$

Diese Reihe ist gefunden durch Ausrechnen der ersten sechs Koeffizienten, an denen dann das allgemeine Bildungsgesetz abgelesen ist. Ein ausführlicher Beweis wäre zu umständlich. Aus der so gewonnenen Beziehung folgt nun sofort, daß der reelle Teil der λ_ν stets positiv, also der absolute Betrag von $1-\lambda_\nu/1+\lambda_\nu$ höchstens gleich 1 ist. Es besteht demnach die Ungleichung:

$$|a_\nu^{(2m)}| \leqq \frac{1}{(2m-1)!\,2\nu!}\,\frac{B_{2m+2\nu}}{2m+2\nu}. \tag{125}$$

Für die Bernoullischen Zahlen B gilt bekanntlich die Ungleichung:

$$B_{2p} \leqq \frac{\pi}{6}\,\frac{(2p)!}{(2\pi)^{2p-1}},$$

so daß nach (125):

$$|a_\nu^{(2m)}| \leqq \frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2m+2\nu-1}\cdot\frac{(2m+2\nu-1)!}{(2m-1)!\,2\nu!}. \tag{126}$$

Dies gibt Veranlassung zur Untersuchung der Funktion:

$$\varphi(x,y) = \alpha^{x+y}\cdot\frac{\Gamma(1+x+y)}{\Gamma(1+x)\,\Gamma(1+y)}, \tag{127}$$

die für $x = 2m - 1$, $y = 2\nu$ die Gestalt von (126) annimmt. Unter Benutzung der bekannten Beziehung:

$$\sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x < \Gamma(1+x) < \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x e^{\frac{1}{12x}}$$

folgt, wenn im Nenner der kleinere, im Zähler der größere dieser beiden Näherungswerte gesetzt wird, aus (127):

$$\varphi(x,y) < \alpha^{x+y} \cdot \sqrt{\frac{x+y}{2\pi x y}} \cdot \frac{(x+y)^{x+y}}{x^x \cdot y^y} \cdot e^{\frac{1}{12(x+y)}}.$$

Diese Funktion ist in x und y durchaus symmetrisch gebaut, so daß wir sie nur etwa bezüglich x zu untersuchen brauchen. Nennt man die kleinere der in (126) auftretenden Zahlen x, so kann y gleich αx gesetzt werden, wobei $\alpha \geqq 1$; dann kommt:

$$\varphi(x, \alpha x) < \sqrt{\frac{1+\alpha}{2\pi\alpha x}} \cdot \left(\frac{[\alpha(1+\alpha)]^{1+\alpha}}{\alpha^\alpha}\right)^x e^{\frac{1}{12x(1+\alpha)}}.$$

Wir wollen nun a so wählen, daß stets:

$$\frac{[\alpha(1+\alpha)]^{1+\alpha}}{\alpha^\alpha} \leqq 1,$$

d. h. aber:

$$a \leqq \frac{\alpha^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}}{1+\alpha}.$$

Diese Funktion hat ein Minimum bei $\alpha = 1$; also $a \leqq {}^1/_2$. Daher ist:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+y} \frac{\Gamma(1+x+y)}{\Gamma(1+x)\,\Gamma(1+y)} < \sqrt{\frac{1+\alpha}{2\pi\alpha x}} \cdot e^{\frac{1}{12\times(1+\alpha)}},$$

wenn x die kleinere der beiden Größen x und y ist. Wendet man dies auf (126) an, so findet man vorerst für $m > 1$:

$$|a_\nu^{(2m)}| < \frac{\pi^2}{18}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{2m+2\nu}, \tag{128}$$

was aber auch, wie leicht zahlenmäßig nachzuweisen, für $m = 1$ gilt. Auf ähnliche Weise kommt:

$$|a_\nu^{(2m-1)}| < \frac{\pi^4}{12}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{2m+2\nu} \tag{129}$$

und endlich:

$$|a_0{}^{2m}| \leqq \frac{2\pi^2}{3}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{2m} \tag{130}$$

je nachdem $m > 1$ oder $m = 1$.

Der Konvergenzbeweis etwa für die Reihe (39) kann nun so geführt werden. Die Koeffizienten A dieser Reihe, die ja so definiert sind:

$$A_p^{(2m)} = \sum_1^p{}^{(\nu)}\, a_\nu^{(2m)}\, A_{p-\nu}^{(2\nu)}, \quad A_0^{2m} = a_0^{(2m)},$$

sind kleiner oder gleich entsprechenden Größen Q, die durch:

$$Q_p^{2m} = \sum_1^p{}^{(\nu)}\, |a_\nu^{(2m)}|\, Q_{p-\nu}^{(2\nu)}, \quad Q_0^{(2m)} = |a_0^{(2m)}|$$

definiert sind. Dies leuchtet sofort ein, wenn man die ersten dieser Größen hinschreibt:

$$\begin{aligned} Q_1^{(2m)} &= |a_1^{(2m)}|\, Q_0^{(2)} = |a_1^{2m}|\, |a^{(2)}_0|, \\ Q_2^{(2m)} &= |a_1^{(2m)}|\, Q^{(2)}_1 + |a_2^{(2m)}| \cdot Q_0^{(4)} \\ &= |a_1^{(2m)}|\, a^{(2)}_1|\, |a^{(2)}_0| + |a_2^{(2m)}|\, |a^{(4)}_0|. \end{aligned}$$

Führt man jetzt die Werte (128) und (130) in die Beziehungen für die Q ein und definiert neue Größen P:

$$P_p^{(2m)} = \frac{\pi^2}{18}\sum_1^p{}^{(\nu)}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{2m+2\nu} P_{p-\nu}^{(2\nu)}, \quad P_0^{(2m)} = \frac{\pi^2}{6}\left(\frac{1}{\pi}\right)^{2m}, \tag{131}$$

so sind nach dem Obigen die P wiederum größer als die Q, die wieder größer sind als die Absolutwerte der A. Es ist daher die Reihe (39) sicher konvergent, wenn:

$$\sum_0^\infty{}^{(p)}\, P_p^{(2m)}\, v^{4p} \tag{132}$$

konvergiert. Wegen (131) ist nun:

$$\frac{P_{p+1}^{(2m)}}{P_p^{(2m)}} = \frac{P_{p+1}^{(2)}}{P_p^{(2)}} \quad \text{und} \quad P_p^{(2m)} = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{2m-2} P_p^{(2)}; \tag{133}$$

setzt man die letztere Beziehung jetzt wieder in (131) ein, so kommt:

$$P_p^{(2)} = \frac{\pi^2}{18} \sum_1^p \nu \left(\frac{1}{\pi}\right)^{4\nu} P_{p-\nu}^{(2)}.$$

Hieraus folgt aber:

$$P_{p+1}^{(2)} = \frac{P_p^{(2)}}{\pi^4}\left(1 + \frac{\pi^2}{18}\right),$$

d. h. nach (133):

$$\frac{P_{p+1}^{(2m)}}{P_p^{(2m)}} = \frac{P_{p+1}^{(2)}}{P_p^{(2)}} = \frac{1}{\pi^4}\left(1 + \frac{\pi^2}{18}\right).$$

Die Reihe (132) konvergiert daher für:

$$\left(\frac{v}{\pi}\right)^4 < \frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{18}}, \text{ d. h. } \frac{v}{\pi} < 0{,}894,$$

oder in anderer Form:

$$\frac{r}{h} < 0{,}447.$$

Da wir aber an der ursprünglichen Reihe (39) sehr große Vereinfachungen angebracht haben, so können wir gewiß sein, daß diese Reihe auch noch für den Grenzwert $r/h = 0{,}5$ konvergiert.

Ähnliche Überlegungen zeigen, daß die Reihe (43) für $r/h < 0{,}41$ sicher konvergiert, so daß also hier ebenfalls kein Zweifel über die Konvergenz bis zur Grenze $r/h = 0{,}5$ bestehen kann.

Lebenslauf.

Am 8. Februar 1888 wurde ich zu Frankfurt a. M.-Bockenheim geboren und absolvierte zu Ostern 1906 die Klingeroberrealschule zu Frankfurt a. M. Ich studierte dann in Göttingen Mathematik und Physik und ging nach viersemestrigem Studium nach München. Hier wurde ich Schüler von Hrn. Prof. Sommerfeld, dessen Vorlesungen ich, ebenso wie die damit verbundenen Übungen, mit stetem Interesse besuchte.

Es ist mir ein Bedürfnis, meinem hochverehrten Lehrer hierfür und mehr noch für die Einführung in die Probleme der theoretischen Physik, die ich in persönlichem Umgang mit ihm genoß, meinen tiefempfundenen Dank auszusprechen.

Neben Physik studierte ich in München noch Mathematik und Philosophie; ich möchte nicht versäumen, insbesondere den Herren Professoren Pringsheim und Voss für die erhaltene mathematische Schulung meinen Dank abzustatten.